6) J. Rogiers, E.W. Grundke and D.D. Betts, Can. J. Phys. **57** (1979), 1719.
S. Takada, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 1121.

7) J.B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51** (1979), 659. Proceedings of Kyoto Summer Institute : Physics of Low Dimensional Systems, 1979.
J. Solyom, Advance in Physics **28** (1979), 201.

8) S. Miyashita, H. Nishimori, A. Kuroda and M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **60** (1978), 1669. S. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **63** (1980), 797.
S. Miyashita, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 1595.

9) J. Tobochinik and G.V. Chester, Phys. Rev. **B20** (1979), 3761.
H. Betsuyaku, Physica **106A** (1981), 311.

10) M. Creutz, Phys. Rev. **D21** (1980), 1006.
M. Creutz, Phys. Rev. **D21** (1980), 2308.

11) E.H. Lieb, Phys. Rev. Letters. **18** (1967), 1046.
H. van Beijeren, Phys. Rev. Letters. **38** (1977), 993.
L.P. Kadanoff, Ann. Phys. **121** (1979), 38.
H.J.F. Knops, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V*, E.G.D. Cohen, Editor, North-Holland Publishing Comany, 1980.

Real-Space Renormalization-Group (RG) Approach

—— Differential Renormalization ——

東北大・工　　山　崎　義　武

物性物理の中で実空間のくりこみ理論〔 dynamics については高野氏の review を参照されたい〕がどのように発展してきたか，その重要な流れを概観し，最近の新しい発展として，殊に，素粒子分野の研究者にとってなじみの少い微分形くりこみ理論に重点を置いて解説し，物性・素粒子間の情報交換関係から協力関係への橋渡しとなれば幸である。

一般に，くりこみ群の方法は運動量空間のくりこみ理論（例えば， Callan-Symanzik 方程式やくりこみ群の方程式）から分るように，Onion (or Tree) scheme,

即ち，　$H_R^{(n)} = R^n H_b \qquad (n=1,\ 2,\ 3, \cdots)$

のように表わされる。H_b は裸の Hamiltonian 又は Action で，$H_R^{(n)}$は n 回のくりこみ操作で得られる Hamiltonian 又は Action である。 Rはくりこみ演算子である。この演算子には，$H_R^{(n)}$ を$H_R^{(n-1)}$ と同じ形に保ち，長さなどを rescale する変換を含んでいなければならない。この過程が実空間のくりこみ理論でどのように組立てられてきたかが本題の実空間のくりこみ理論の発展の review である。

実空間のくりこみ理論は decimation の概念を中心にして発展してきた。 その大きな流れを大別すると

(i) Majority rule 法

(ii) Migdal-Kadanoff 近似法

(iii) Stanford-Orsay 法 (素粒子分野では Stanford，物性では Orsay のグループにより展開された)

(iv) Differential renormalization 法

に分けられよう。

これらの方法の特徴を概説するために最も単純な強磁性の一次元 Ising 系

$$H=-\sum_i K\sigma_i\,\sigma_{i+1}\qquad (\sigma\equiv s^z,\ s=\frac{1}{2})$$

を例に取って進めよう。系の物理的性質は，分配関数が計算出来れば，導出出来る。その分配関数は図1に示す spin 列の trace を取ることによって求められる。横方向には n_s 個のspin

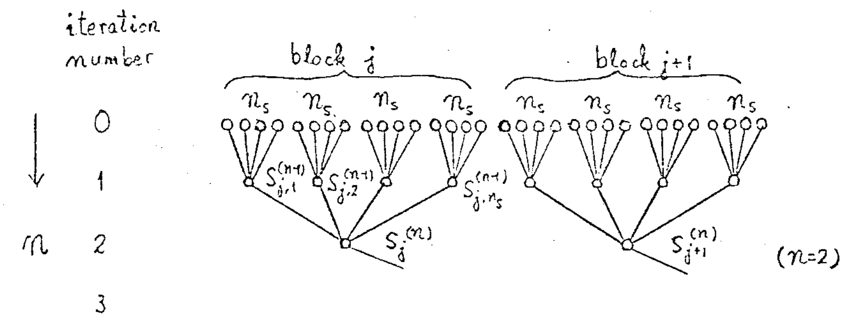

図 1

を decimate して次の計算に用いる block spin に置きかえてゆく過程を， 縦方向には計算の繰返し数 n が示されている。

(i) の方法[1]　多数決の原理，即ち，$\sigma_j^{(n)}=\mathrm{sgn}\sum_{p=1}^{n_s}\sigma_{j,\,p}^{(n-1)}$ を用いて，n_s 個の spin の和が正 (負) なら block spin として正 (負) 方向を与えて Hamiltonianの形を元の形に

保ち，長さは格子定数と n_s の積に拡大する。このとき n_s としては奇数値を採るのがよい。Ising 系でない系に対しても Ising 化して計算する難点がある。

(ii)の方法[2] 簡単化して，$n_s=2$ の場合を考える（図２）。繰返し数 $n=0$ のとき，一は

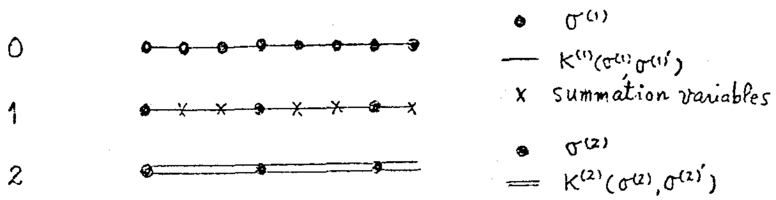

図　2

最隣接相互作用 $K^{(1)}(\sigma^{(1)}, \sigma^{(1)'})$，×は trace される spin 変数を示す。 分配関数の表式で spin (×) について trace を取り，繰返し数 $n=1$ のときの最隣接相互作用 $K^{(2)}$ として（n_s+1）$K^{(1)}$ を採ると元の Hamiltonian の表式の形が保存される。このおきかえは，相互作用の数と duality を保存すると同時に長さなどの rescaling の役割を演じている。この近似法は，微視的な spin 間の相互作用を無視しながらも duality を保っている点で， 転移温度の決定に有効であるが，臨界指数に対しては必ずしも良い値を与えない。精度を高めるための試（例えば，変分法の併用，等）もなされているが，未知の系にこの方法を適用したとき得られる結果の正確さの程度についての判定法が分っていない。

(iii)の方法[3] spin 1/2 の強磁性一次元 Ising の系に磁場を容易軸に垂直な方向に加えた場合

$$H=-(J\sum_i s_i^x s_{i+1}^x + h\sum_i s_i^z), \quad J\equiv J^{(0)},\ h\equiv h^{(0)},\ c^{(0)}\equiv 0$$

を考える。この系は磁場が弱い（$h/J<1$）とき磁化が x 軸の正又は負方向に向きうるdoublet states をとり，磁場が強い（$h/J>1$）とき磁化が z 軸方向を向く singlet state をとる，即ち，一次元でも相転移の起る系である。図１の繰返し数 n のときの Hamiltonian

$$H^{(n)}=-\sum_i (J^{(n)} s_i^{x(n)} s_{i+1}^{x(n)} + h^{(n)} s_i^{z(n)}) + c^{(n)}\sum_i I_i^{(n)}$$

は，一次元鎖を n_s 個の spin をもつ block spin に分けて，intra block Hamiltonian

$$H_j^{(n)}=-J^{(n)}\sum_{p=1,\cdots,n_s} s_{j,p}^{x(n)} s_{j,p+1}^{x(n)} - h^{(n)}\sum_{p=1,\cdots,n_s} s_{j,p}^{z(n)}$$

と interblock Hamiltonian

$$H^{(n)}_{j,\, j+1} \;=\; -\,J^{(n)}\; s^{x(n)}_{j,\, n_s}\; s^{x(n)}_{j+1,\, 1}$$

を用いて

$$H^{(n)} = \sum\nolimits_j \left(H^{(n)}_j + H^{(n)}_{j,\, j+1} + c^{(n)} \sum\nolimits_{p=1,\cdots,\, n_s} I^{(n)}_{j,\, p}\right)$$

と書ける。Key point は，電子計算機で，n_s 個の spin からなる有限鎖の Hamiltonian $H^{(n)}_j$ を対角化する；正と負の各 spin の副空間の最低エネルギー状態のみを取り出してそれらの固有状態と固有値を次の（$n+1$）回の固有状態 $|+>^{(n+1)}$，$|->^{(n+1)}$ と固有値 $E^{(n+1)}_+$，$E^{(n+1)}_-$ とみなす。この操作を繰返すことにより $J^{(n+1)}$，$h^{(n+1)}$，$c^{(n+1)}$，$I^{(n+1)}_i$ が $J^{(n)}$，$h^{(n)}$，$c^{(n)}$，$I^{(n)}_i$ 即ち，J と h の関数として表わされる。すべての物理量は，これらの係数から求められ，例えば，系の1 spin 当りの基底エネルギーは $(E_0/N)_{N\to\infty} = \lim_{n\to\infty}(c^{(n)}/n^n_s)$ で与えられる。この方法は絶対零度の低次元系の物性を調べるのにかなり有効である。有限温度への拡張，dynamics への拡張の問題が残されている。

以上の三つの方法あるいは，それらの改良型については物性・素粒子分野の研究者はよく理解しておられることなので簡単にとゞめておいた。

くりこみ理論では，一回の繰返し計算で系の自由度の消去される比が熱力学的極限で有限な場合〔(i)，(ii)，(iii)〕と零の場合〔(iv)〕がある。前者の場合は相互作用に対して discrete transformation となっているのに対して，後者の場合はそれは differential character をもっている。有限温度でしかも微視的相互作用を正確に考慮した実空間のくりこみ理論を組立てるのにはどうしたらよいか？この疑問への解答の一つは多くの方々によく知られていない differential renormalization の方法がある。主題ではあるが引用文献を記して説明は簡単にとどめる。

(iv) の方法　十分に長い鎖（長さ $L=aN$；a＝格子定数）上に N 個の spin があるとする。原理は N 個の spin 系で spin の trace を取って $N-1$ 個の spin 系にしてから格子定数 a を $a/(1-a/L)$ に拡大する。実際には図3に示すように N 個の spin 系（繰返し数 $n=0$）と $N-1$ 個の spin 系（繰返し数 $n=1$）を相互作用で結んだ系を考えて，$n=0$ の系のすべての spin について trace を取る。残された $N-1$ 個の spin 系の Hamiltonian の形は元の形を保ち，長さの rescaling を行うと熱力学的極限で厳密解を与えるくりこみ群の方程式が相互作用に対して得られ，それは微分形で表わされる。

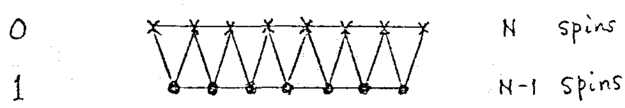

図3

この方法は，二次元以上の格子では dual 変換と rescale (dilatation) 変換によって組立てられる。この方法がどのような系に適用されどんな結果が得られたかを以下にかいつまんで述べよう。

これまでに正確に解けた興味ある系は，

(Ⅰ) spin 1/2 の二次元 Ising系 (三角格子又は六角格子),

(Ⅱ) d次元 Gaussian 系 ($d \geq 1$) (超三角格子又は超六角格子),

(Ⅲ) van der Waals (Weiss) spin 系

に分類されよう。

(Ⅰ) の系[4] この系の相互作用としては三個の異方的最隣接相互作用のみが働くと仮定する。図4に示す一辺の長さ L の三角形は格子定数 a の二つの副三角格子 A () と B () からなり，これらの副三角格子は同時に六角格子 () を構成する。分配関数式において，六角格子の spin (×) について trace を取ると A－三角格子の Hamiltonian が得られ, 六角格子の spin (◎) について trace すると B－三角格子の Hamiltonian が求められる。 その際二つの副格子の Hamiltonian は最隣接相互作用が dual 変換定数分だけ補正 (spin field に対する rescaling) を受け，更に，相互作用のみの関係する定数項が現われる点を除いては，同じ形を保つ。 B－三角格子は A－三角格子に比べて一辺につき一個の spin が減少したことになっている。そこで B－三角格子の 全体の長さを A－三角格子のそれと同じ大きさに拡大する，即ち，格子定数 a を $a/(1-a/L)$ に rescale する。 A－三角格子から B－三角格子への二回の dual 変換と rescale 変換の過程からくりこみ演算子が近似なしに組立てられる。
a/L を微小量として Taylor 展開することにより，くりこみ群の表式が最隣接相互作用に対して微分方程式の形で求められる。

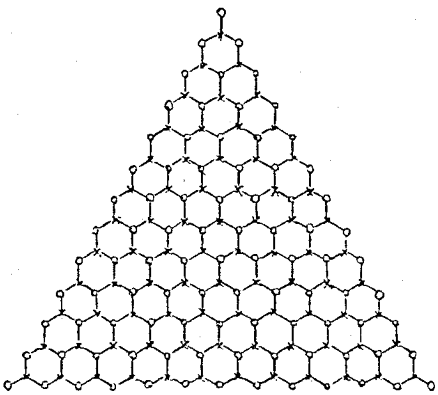

図 4

臨界点近傍の振舞はこのくりこみ群の表式からすべて求められる。主な結果としては，① reduced interaction〔 $u_i \equiv (sh2p_j\ sh2p_k)^{-1}$， i, j, k；cyclic，p；六角格子の相互作用〕space で三つの相互作用の和が 1 に等しい面でつくられる subspace は常にくりこみ群の表式を満足し，しかも，この面上に次に述べる臨界点が存在する（この空間を critical invariant subspace と呼ぶ）；② 臨界点に対応する固定点の値が相互作用に対して得られた；③ 相互作用空間で固定点のまわりでの流れ（即ち，系の安定性）が調べられ，その固有値から温度軸方向の臨界指数 $y_T = 1$ 即ち，比熱に対する臨界指数 $\alpha = 0$ が得られた； ④ 系の自由エネルギーの表式も得られた。これらの結果は homogeneous interaction の極限で Onsager の結果と一致するものである。有限温度で正確解が得られた点は特筆すべきであろう。

しかし，この方法は，二次元で， spin 1/2 の Ising 系に磁場が加った場合， 磁場がなくても spin が 1/2 でない場合，あるいは，三次元の場合に適用することは非常に難しい。いかにこの困難を克服すべきか？その解決策の一つとして，連続 spin で乗切ろうという努力が次のテーマである。

(Ⅱ)の系[5] こゝでの目的は，有限温度で，しかも現実的な物理系に対しても differential renormalization の方法が適用出来るようにしたい。そのためには，先ず，第零近似に相当する Gaussian 系に対してどのように適用したらよいか， どのような結果が得られるかを調べることが必要である。運動量空間のくりこみ理論における $4-\varepsilon$, $2+\varepsilon$, $1+\varepsilon$, 等の展開を念頭において，d 次元の超三角格子と超六角格子における Gaussian 系を考える。 異方的な最隣接相互作用だけが働くと仮定すると超三角格子では $d(d+1)/2$ 個，超六角格子では $(d+1)$ 個の相互作用が存在する。そのうち独立な相互作用の数は $(d+1)$ 個だけであることに注意しよう。非常に大きな稜の長さ L の超三角体は二つの副超三角格子 A と B からなり，それらは同時に超六角格子を構成している。

(Ⅰ)の系の場合と同様に二回の dual 変換により超六角格子を介して，A格子のHamiltonian から B格子のそれに変換し，格子定数を a から $a/(1-a/L)$ に rescale する。この過程で熱力学的極限を取ると，$(d+1)$ 個の相互作用に対するくりこみ群の表式と，残りの独立でない相互作用に対する拘束条件が得られる。

得られた主な結果は，①超六角格子の相互作用空間で独立な $(d+1)$ 個の和が 1 に等しい面が critical invariant subspace になる；②臨界点に相当する固定点の値は $(d+1)$ 個の相互作用の正，負の値に対応して 2^{d+1} 個求められ， そのうちの一点が強磁性に対応する；③相互作用空間で固定点のまわりの流れに対応する固有値から温度軸方向の臨界指数 $y_T = 2$ 即ち，

相関々数に対する臨界指数 $\nu=1/2$ が得られた；④系の自由エネルギーの表式も得られた；⑤温度を変えたときの固定点近傍での相互作用の振舞と系の自由エネルギーの振舞が具体的に得られた。

先ず，二次元系で(Ⅰ)の系の結果と比較してみよう。critical invariant subspace で二つの系を考える限りにおいて固定点を含めて完全に一致する，即ち，この空間では Ising 系の reduced interaction u_i を Gaussian 系の相互作用 p_i に対応づければ完全に一致する。Gaussian 系は非現実的系として一笑されてきたが，それは大きな誤りであるという一つの証になったことは重要な発展の一つであろう。しかし，臨界指数の値から論ずると Ising 系と Gaussian 系では差が出てくることも注意しておこう。

次に，三次元以上の系については， Ising 系では正確解が得られていないので比較出来ないが，分子場理論の値と比較すると臨界指数は一致している。

最も重要な点は，有限温度で，d 次元格子の Gaussian 系に対して厳密解を与えるdifferential renormalization の方法が確立したので，$4-\varepsilon$, $2+\varepsilon$, $1+\varepsilon$，等の展開を併用して現実的な系にいどむ足がかりが出来たことである。この先の発展は別の機会にゆずろう。

最後に，格好な頭の体操になりそうな話題，即ち，differential renormalizationの面白い適用例を紹介しよう。

(Ⅲ)の系[6]　N 個の可換な spin ($s_j=\pm 1$, $j=1,2,\cdots,N$) が互に多体の potential を感じて相互作用する系を考える。系の Hamiltonian としては，分子場模型の Hamiltonian の形を取り，それは磁化の関数として表わされた内部 energy に対応する。系の自由 energy は entropy と内部 energy で表わされ，それが最小値を取る状態が安定な系として実現する。

この系の特徴は，一見，〝長さ〟に相当する量が含まれていない点である。このような場合，くりこみの演算子はどのように組立てられるのか？　その方法は，一個の spin の traceを取って $N-1$ 個の spin 系に移し，その際，自由 energy が保存する条件を，(Ⅰ),(Ⅱ) の系と同様に課す。$1/N$ 展開して，熱力学的極限を取ると内部 energy に対してくりこみ群の方程式が求められる。この式から，固定点とそのまわりでの振舞，系の自由 energy の表式が得られた。その際，自由 energy の表式に含まれる積分定数の性質について詳しく議論された。

こゝで重要なことは，長さに対する rescale 変換を ($N-1$) 個の spin が占有する空間の体積を N 個の spin が占めていた体積 (形状と大きさについて不問) まで拡大する変換を $1/N$ 展開の形で処理した点であろう。

この段階までくると誰にでも実空間のくりこみ群の方法が展開出来たり，使えそうな気分になれましたでしょうか？もっと実用的な実空間のくりこみ群のいろいろな方法については，高

野氏の review を参照されれば一層現況がよく分ると考えられます。

文 献

1) Th. Niemeijer and J.M.J. van Leeuwen, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb and M.S. Green, eds. (Academic Press, London, 1976), Vol. 6, p425.
2) A.A. Migdal, Z. Eksper. Teoret. Fiz. **69** (1975), 810, 1457.
L.P. Kadanoff, Ann Phys. **100** (1976) 359.
3) S.D. Drell, M. Weinstein and S. Yankielovicz, Phys. Rev. **D14** (1976) 487, 1627 ; **D16** (1977) 1769, **D17** (1978) 523.
R. Jullien, J.N. Fields and S. Doniach, Phys. Rev. **B16** (1977) 4889.
R. Jullien, P. Pfeuty, J.N. Fields and S. Doniach, Phys. Rev. **B18** (1978) 3568.
4) H.J. Hilhorst, M. Schick and J.M.J. van Leeuwen, Phys. Rev. **B19** (1979) 2749, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 1605.
5) Y. Yamazaki, H.J. Hilhorst and G. Meissner, J. Stat. Phys. **23** (1980) 609, Y. Yamazaki and H.J. Hilhorst, Phys. Lett. **70A** (1979) 329.
6) R. Dekeyser and A. Stella, J. Stat. Phys. **23** (1980) 587.

実空間くりこみ群による動的臨界現象

東大・理　高 野　宏

臨界現象の研究に用いられるくりこみ群の方法[1]は，運動量空間でくりこみを行なう方法と実空間で行なう方法の２種に大別できる。運動量空間でのくりこみ群の方法は，現象論的ハミルトニアン（例えば G−L−Wハミルトニアン）から出発し，スケーリング，ユニバーサリティ，クロスオーバー等の臨界現象の一般的性質の理解，臨界指数等の評価に成功した。また，この方法は動的臨界現象にも用いられ，成功を収めている。[2] これに対し，実空間でのくりこみ群の方法は，ミクロなハミルトニアン（例えばイジング・ハミルトニアン）から出発する。このため，個々のモデル（ディスクリートな変数をもち，格子上で定義されているようなモデル）をそれぞれの次元で（ε－展開などを用いずに）直接扱えるという利点を持っている。また個