

岩崎洋一

3) M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 1441.

4) T. Yoneya, Nucl. Phys. **B144** (1978) 195; **B183** (1981) 471.

5) T. Yoneya, Nucl. Phys. **B153** (1979) 431.

二次元古典ハイゼンベルク模型の低温に於ける振舞^{*})

筑波大・物理 岩崎洋一

最近, Shenker と Tobochnik¹⁾ によって, モンテ・カルロ法とくりこみ群を用いて, 二次元 $O(3)$ 古典ハイゼンベルク模型の低温に於ける振舞が詳しく調べられた。彼等の結果を簡単にまとめると, 低温側では, Kadanoff-Wilson 流のくりこみがうまく働き, ブロック・スピン変換をした後は, 温度をくりこむ事によって, 変換前と同じ物理量を得る。しかし, これは $\beta \geq 1.3$ (低温) でうまくいき, $\beta \leq 1.3$ (高温) ではうまくいかない。このことは, $T=0$ が第二種の相転移であると, 相転移の近傍でくりこみ群が使えるはずであるという, Kadanoff-Wilson の考えと一致する。一方, 高温側では, 高温展開と一致する。

典型的な例として, 二点相関関数を考える。 $\beta \geq 1.3$ でモンテ・カルロ法による結果は,

$$\Gamma(m, n) \sim \exp(-r/\xi(\beta)),$$

$$\xi(\beta) = C \exp(2\pi\beta)/(2\pi\beta) \cdot a \quad (1)$$

と表わすことができる。ここで r は m と n の間のきよりであり, a は格子間きよりである。定数 C は

$$C \sim 0.01 \quad (2)$$

で与えられる。式(1)で与えられる β 依存性は, くりこみ群から要請される通りである。 $\beta \geq 1.3$ でくりこみ群と一致する結果が得られるということは, 重要な結果で, 実際には数値計算が出来ない程の大きな β に対しても式(1)が成り立つことを示したことになる。これにより,

^{*}) 脚注: 研究会に於いては "真空の構造" という題で話したが, 上記の題名の方が内容をよく表わしているので変更した。

$O(3)$ 古典ハイゼンベルク模型に於いては、どんな低温でも相関関数は指数関数的に減少することが結論される。

この事実と、素粒子論におけるゲージ理論におけるクォークの閉じ込めとは密接に対応している。この点は、他のところ²⁾で簡単にふれたので、ここではその点に関することは省く。

さて、我々は $\beta \geq 1.3$ での振舞を主に考える。くりこみ群が使えるということは、第二種の相転移点 ($T=0$) に充分近く、相関距離が長く、それに比べ格子間隔を充分小さいとみなし得ることを意味する。そこで、 $a \rightarrow 0$ の距離 (連続極限) を取る。

古典ハイゼンベルク模型はハミルトニアン

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \mathbf{s}(i) \cdot \mathbf{s}(j) \quad (3)$$

によって定義される。ここで格子は平方格子を考え、スピン変数 $\mathbf{s}(i)$ は各格子上に存在し、長さ 1 の 3 成分のベクトルである。相互作用は、最近接格子間のみで等方的とする (以下 $J=1$ とおく)。分配関数 Z 、相関関数 $\Gamma(m, n)$ は通常のように定義される。

$$Z = \int \prod_i d^3 s_i \delta(s_i^2 - 1) \exp(-\beta \sum \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) \quad (4)$$

$$\Gamma(m, n) = Z^{-1} \int \prod_i d^3 s_i \delta(s_i^2 - 1) \mathbf{s}_m \cdot \mathbf{s}_n \exp(-\beta \sum \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) \quad (5)$$

式(3)で与えられるハミルトニアンの連続極限をとる。 $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j = -\frac{1}{2} (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)^2 + 1$ を用いて、差分を微分に直すことにより

$$H = \frac{1}{2} \int \sum_{\mu=1}^2 (\partial_{\mu} \mathbf{s}) (\partial_{\mu} \mathbf{s}) d^2 x ; \quad s^2 = 1 \quad (6)$$

とする。式(4)と(5)でも連続極限をとる。これは、まさしく、Feynman の与えた経路積分による場の理論になっている。式(6)で定義される場の理論を非線型 $O(3)$ シグマ模型という。これは、 d 次元の古典統計力学と $(d-1)$ 次元空間の場の理論の一例である。²⁾

ところで、 $\beta \gg 1$ のとき、(5)及び(6)の状態に対する和を求めるには、鞍点法を用いてよいであろう。連続極限で鞍点は、式(6)のオイラー方程式の解として求まる。又、ハミルトニアン値が発散する解は、(4)及び(5)に寄与しないので、ハミルトニアン有限という条件のもとに運動方程式の解を求める。

これ等の解は、Belavin と Polyakov³⁾によって得られ、インスタントン解として知られている。

詳しい計算⁴⁾は省略するが、相関関数(5)を鞍点法を用いて計算した結果、次の結果を得る。

岩崎洋一

$$\langle s(x, y) s(0, 0) \rangle = \frac{2}{3} K + \frac{1}{6} K^2 + \frac{1}{15} K^3 + \dots \quad (7)$$

ここで

$$K = m r K_1(m r) \quad (8)$$

ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, K_1 は変形ベッセル関数で,

$$m = \frac{32 \sqrt{2}}{\exp(1 - \pi/2)} \exp(-2 \pi \beta) 2 \pi \beta \cdot \frac{1}{a} \quad (9)$$

である。式(7)より

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \langle s(x, y) s(0, 0) \rangle \propto e^{-m r} + O(e^{-2 m r}) , \quad (10)$$

故に相関距離は

$$\xi = \exp(1 - \pi/2) / 32 \sqrt{2} \exp(2 \pi \beta) / (2 \pi \beta) \cdot a \quad (11)$$

と求められる。数係数 C は

$$C = \exp(1 - \pi/2) / 32 \sqrt{2} = 0.0126 \dots \quad (12)$$

で与えられ、モンテ・カルロ法による値 0.01 と、非常に良く一致する。

以上の結果は、スピン波近似ではいくら次数をあげても原理的に得られない。又、場の理論の立場では、摂動論が原理的に使えない場合になっている。

又、詳しくふれる余裕がないが、相関関数のクラスター性を調べることにより、新しい型の相転移が存在することが示された。(詳しくは文献 4)

文 献

- 1) S.H. Shenker and J. Tobochnik, Phys. Rev. **B22** 4462 (1980)
- 2) 岩崎洋一, 物性研究 **35** , D79(1981)
- 3) A.A. Belavin and A.M. Polyakov, ZhETF, Pisma **22**, 503 (1975).
- 4) Y. Iwasaki, Prog. Theor. Phys. 9月号(1981); 物理学会誌(発行予定); preprint UTHEP - 81.