29) M. Suzuki, Phys. Letters **42A** (1972), 5; Prog. Theor. Phys. **49** (1973), 424, 1106, 1440, 1451; in Proceedings of the Conference on *Renormalization Group in Critical Phenomena and Quantum Field Theory*, May, 1973 (Temple University).

30) M. Suzuki, J. Phys. C : Solid State **7** (1974), 255.

31) R.Z. Bariev, Zh. Eksp. Teor. **77** (1979), 1217. R.M. McCoy and J.H.H. Perk, Phys. Rev. Letters. **44** (1980), 840.

離散群格子ゲージ模型と Migdal 近似*)

九大・理　井 町 昌 弘

§ 1. Quark の「とじこめ」と Lattice Gauge Theory

陽子，中性子，π中間子等のハドロンと呼ばれる素粒子は現在では複数個の quark から出来ていると考えられている。quark は量子電気力学（アーベル群に従う）を非アーベル群 $SU(3)$に拡張した量子色力学（QCD）におけるゲージ場 gluon を媒介して結合しており，しかも quark とか gluon とかの「色つき」の粒子は決してハドロンという「色なし」の状態の外部へとり出すことが出来ない，いわゆる「とじこめ（Confinement）」機構が働いている，らしいことが分ってきた。これが長距離における QCD の著しい特徴である。QCDのいま一つの特徴は近距離にいけばいく程 coupling constant がゼロに近づくといういわゆる「漸近自由」と呼ばれる性質をもっていることが摂動論にもとづいて証明されており，長距離（$g\to$大）でのとじこめと近距離での漸近自由（$g\to 0$）が両立する世界が我々の世界であるとすると，相転移はないと期待される。さて連続時空の場の理論で長距離即ち強結合領域でとじこめを証明することは QCD の非線型性のために極めて難しい課題であるが，連続時空での問題を格子時空におきかえ統計物理的手法を用いることによってある程度まで理解することが可能になった。Wilson はアーベル群 $U(1)$に基く格子ゲージ模型を提唱し，strong coupling（S. C.）ではとじこめ＝「面積則」を，weak coupling（W. C.）では通常の QED の Lagrangian に戻ることを示した[1]; partition function $<Z>$ は

$<Z> = \int \pi\, dU \ \ \exp(-S(U))$,　action は

*)　米山，河辺幸との共同研究。

$$S(U) = \beta\frac{1}{2}\sum_p [\,(1-UUU^{+}U^{+}) + \mathrm{c.c}\,]\,,\quad U = \text{link variable} = \exp(\,i\,B_\mu)$$

$$U = U(1)\ \text{element},\quad \beta = \frac{1}{2\,g^2}\,,\quad B_\mu = \text{ゲージ場},\quad p = \text{plaquett}$$

で与えられる。action は局所ゲージ変換

$$U \to V^{-1}UV$$

に対して不変である。物理量はゲージ不変でなければならないがこのような物理量として重要なのは Wilson loop $W(C) = \prod_C U$ である。C は (Euclid) 時空の closed loop である。 物理的には$<W(C)>$は quark-antiquark の propagator を表わしている。Wilson の $U(1)$ LGT は strong coupling ($\beta \to 0$)で面積則を与え,

$$<W(C)> \sim \exp(-A\sigma)$$

とふるまう。ここでAはCの囲む面積。例えばCを $x-t$ 平面内の長方形に選ぶと $A = TL$ (Tは時間間隔, L は x方向の空間間隔) だから $<W(C)> = \text{propagator} \propto \exp(-ET)$, $E = \sigma L = \text{energy}$

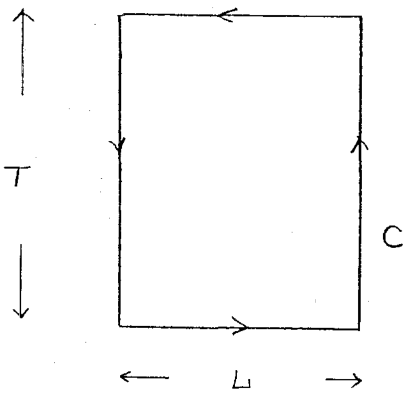

図 1

となる。即 $E = \sigma L$ だから (σ は string constant と呼ばれ定数$=(\ln g^2)/a^2$, aは格子定数) $L \to \infty$ は $E = \infty$ を要し, とじこめが保証される。$U(1)$ LGT においては W. C. ($\beta \to \infty$) で QED phase (non confinement) であり S.C. との間に相転移があることが分っている一方 QCD は前述のように「相転移なし」が期待されているから, $U(1)$模型では不充分で, 非アーベル群について調べる必要がある。

§ 2. cross over 現象=高次相転移?

多次元 ($D > 2$) で LGT を exact にとり扱うことは出来ないので, 現在行われている代表的な方法は 1) 近似をもちこむ (Migdal[2], Kadanoff 等) 2) 数値計算による等である。Creutz[3] は $D = 4$ の $SU(2)$ LGT を Monte Carlo で調べ大変興味深い結果を得た。$SU(2)$ LGT は前述 Wilson action の U を $SU(2)$の element となるように選ぶことによって定義される ($\beta \equiv 4/g^2$)。10^4 コの lattice size についての解析の結果, 一片 N − lattice side の正方形 Wilson loop の期待値は

$<W(C)> \propto \exp(-AN - BN^2)$ で fit することができ面積則の係数Bを種々の

bare coupling $\beta \equiv 4/g_0^2$ に対して求めた結果,

$$B \propto \begin{cases} -\ln(\beta/4) & , \quad \beta \sim 0 \qquad \text{S.C.} \\ \exp(-6\pi^2\beta/11) & , \quad \beta \sim 大 \qquad \text{W.C.} \end{cases}$$

に近いふるまいを示すことが確められた。驚くべきことに W.C. でのふるまいは QCD($SU(2)$) の摂動論 (連続時空) で予想されるふるまいとほぼ一致する。従って $SU(2)$ LGT が smooth に，相転移なしで，連続極限に近づきうることを示唆している。いま一つ興味ある結果は S.C. のふるまいと W.C. ふるまいの間のうつり変りが $\beta \sim 2$ 附近の β のせまい領域で突然起っていることでこれは "cross over" 現象と呼ばれている。 これは明らかに単純な 1 次，2 次相転移ではないがいままで知られていない高次相転移なのか等の問題を提起している。

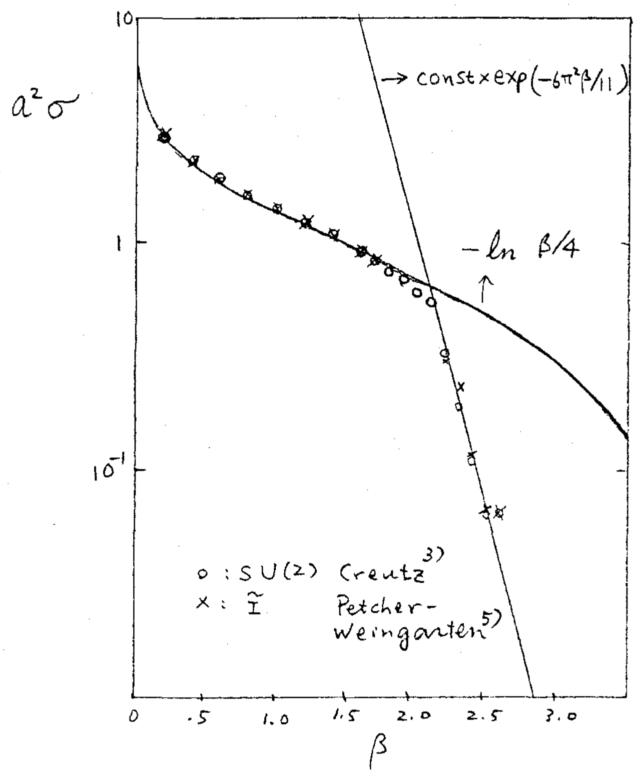

図 2

§ 3. Migdal 近似, Turn Over Point の普遍性

ここでは，連続群 $SU(2)$ でなく，その離散的部分群上の LGT を，Migdal 近似を用いて調

べる。Migdal の original paper に $SU(2)$ についての分析があるが，　これは $SU(2)$ の指標（character）に現われる変数 θ（physical には Field strength に対応）についての無限次のべき級数展開の係数を recursion eq. を用いて次々に決めていくものであるが離散群の場合有限個の元しか含まないため無限個の係数を決めることはできない。そこでここでは別の形の partition function を有限個の係数によって次のように定義する（size L）。[4]

$$F(L,\ \alpha) = \exp\left[\,\beta_0(L) + \sum_{i=2}^{s}\left(-1+\chi_i(\alpha)/n_i\right)\beta_i(L)\,\right]\ 。$$

ここで α は群の class，s は class の総数，$\chi_i(\alpha)$ は既約表現 i の指標，n_i は i の次数，$\beta_i(L)$ は size L での inverse effective coupling を表わす。Migdal recursion eq. は，

$$F(\lambda L,\ \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{s}\widetilde{F}_i^{\lambda^2}(L)\, n_i\, \chi_i(\alpha)/h\right)^{\lambda^{D-2}}$$

ここで　$\widetilde{F}_i(L) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \chi_i^*(\alpha)\, F(L,\ \alpha)/h$　但し p_α は class　α に含まれる元の数。h は群の元の総数（＝位数）。λ は scale（≥ 1）factor を表わす。この漸化式によって $\beta_i(L)$ と $\beta_i(\lambda L)$（$i = 1 \sim s$）の関係が決まる。

既約表現のうち基本表現を i_0 とする。離散群についても $SU(2)$ の基本表現に対応するものを i_0 と呼ぶことにし $\beta_{i_0}(L)$ に注目する。

$$d\beta_{i_0}(\lambda L)/d\lambda\,|_{\lambda=1} = 0\,,\qquad \beta_{i \neq i_0} = 0$$

を満す点 $\beta_{i_0,\,t}$ を turn over point と呼ぶことにする。Migdal 近似の漸化式から各群について $\beta_{i_0,\,t}$ を求めると図 3. のようになる。ここで非アーベル離散群としては $Q(8)$，$\widetilde{T}(24)$，$\widetilde{O}(48)$，$\widetilde{I}(120)$ を調べた。それぞれ quarternion，　正四面体群，正八面体群，正 12 面体群であり括弧内は位数を表わす。興味ある点は Migdal 近似の turn over point は Monte Carlo 計算[5]の cross over point に近い点に現われることである。即，Q，$\widetilde{T}$，$\widetilde{O}$，$\widetilde{I}$ は Monte Carlo 計算によれば，1 次の相転移をもち転移点は h（位数）とともに β＝大の方向へ急速に動き更に $\widetilde{O}$，$\widetilde{I}$ については $\beta \sim 2$ に cross over が現われる。Migdal 近似の結果は h にあまりよらず $\beta \sim 1.9$ に turn over point が現われることを示しており，cross over point に近い。

アーベル群についても類似した結果が現われる。Monte Carlo[6]によればアーベル群 Z_N の LGT は $N \to$ 大（$N \geq 5$）で二つの相転移点をもち β＝大の方の転移点は $h = N \to$ 大 とともに急速に β＝大の方へ動くのに対し，低い方の転移点は N によらず $\beta \sim 1$ にとどまる。Migdal近似の結果は $N \leq 4$ では self duality から得られるのと exact に同じ点に turn over（この

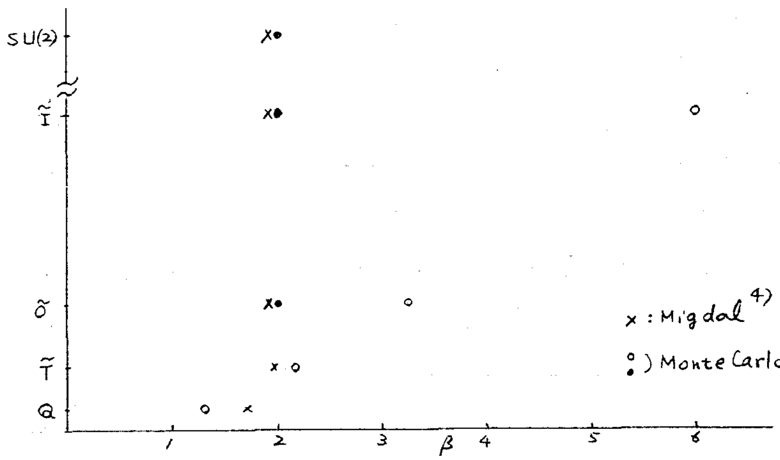

図 3

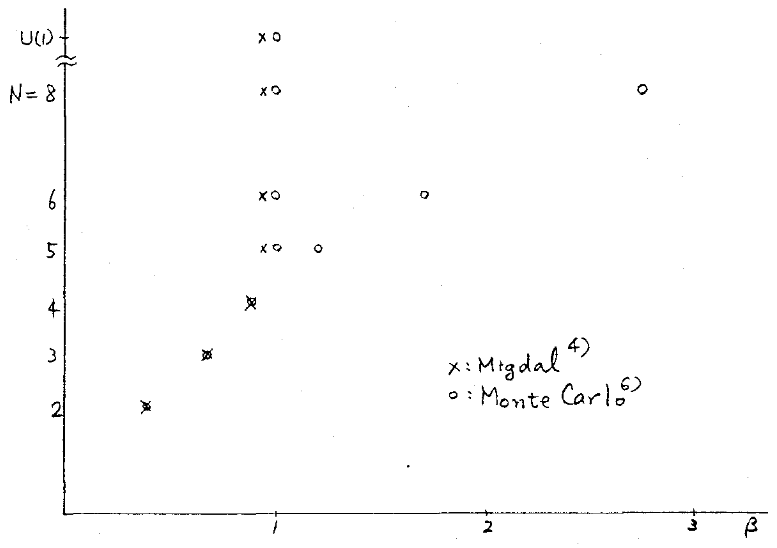

図 4

場合 fixed point と同じ) point が現われ，$N \geq 5$ ではNによらず$\beta \sim 0.9$ に turn over point が現われる。

以上の結果から楽観的に見ると Migdal 近似は cross over point を probe しているように見える。但し物理的に果して turn over point と cross over point が本当に関連しているかどうかを確める課題は今のところ結論は得られておらず今後の検討が必要である。

参　考　文　献

1) K. Wilson, Phys. Rev. **D10** (1974), 2445.

2) A.A. Migdal, JETP **69** (1975), 810; 1457.

3) M. Creutz, Phys. Rev. **D21** (1980), 2308.

4) M. Imachi, S. Kawabe and H. Yoneyama, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) No. 3.

5) D. Petcher and D.H. Weingarter, Phys. Rev. **D22** (1980), 2465.

6) M. Creutz, L. Jacobs and C. Rebbi, Phys, Rev. (1979), 1915.

Approaches to confinement

東大・教養　　米　谷　民　明

QCDにおける閉じ込めの問題を格子ゲージ理論の立場から論じた。以下はその要約。

[1] Confinement = large distance magnetic disordering.

一般にD次元時空の場の理論は，時間を虚数軸に回転して，ユークリッド空間で考えることにすると，D次元空間の古典場の統計力学と見なすことができる。温度に対応するのは，ここで扱うQCDの場合，裸の結合定数の二乗である。QCDの漸近自由性は，格子間隔（$=a$）がゼロに近づくとともに温度を$(\log \frac{1}{a})^{-1}$でゼロに近づけて理論を定義できなくてはならないことを示している。従って，クォーク閉じ込めの問題は，温度がどんなに低くなっても，十分長いスケールでは，ゲージ場のゆらぎにつき系は十分 disorder しているか否かという問題である。

[2] Topological excitations and disordering.

ゲージ群が Abel 群（$Z(N)$）の格子ゲージ系の相構造を調べると，系を disorder させるには，$Z(N)$ magnetic vortex sheet や，$U(1)$ magnetic (Dirac) monopole（特にNが大きい場合）等の topological なゲージ場の配位が重要であることが示唆される。

このことは$Z(N)$模型の計算機実験[1]の結果によって支持されているが，最近 Non Abel 群のゲージ系についても計算機実験が多数行われ，いくつか興味ある結果が得られた。[2,3]その結果は以下のようにまとめられる。

(1) $SU(2)$模型では，閉じ込めが十分低温でも成り立っていて，通常の摂動論から予想され