
 講義ノート

非線形波動

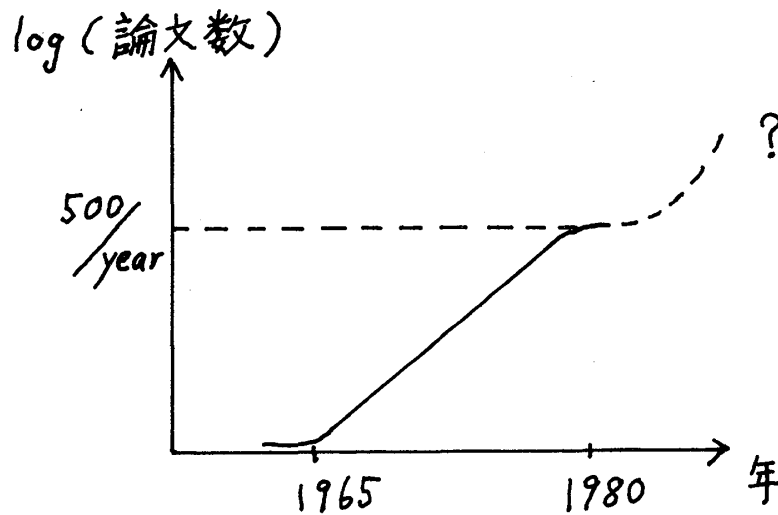
横浜国大・工・応数 戸田盛和

目次

0. はじめに
1. 線形波動
2. 水面波
3. 浅水波
4. ソリトンの発見
5. KdV方程式とこれに付随する Schrödinger 方程式
6. 非線形格子

0. はじめに

まずソリトン関係の論文の数が年々どのように推移してきたかを図でみてみよう。



(プラズマ研, 市川芳彦氏による)

TODA, Morikazu

この講義ノートは、1981年12月3日から5日迄、京大理学部物理教室で行われた大学院特別講義をもとに作成し、戸田先生に目を通していただいたものです。(戸谷隆雄, 久保博嗣)

戸田盛和

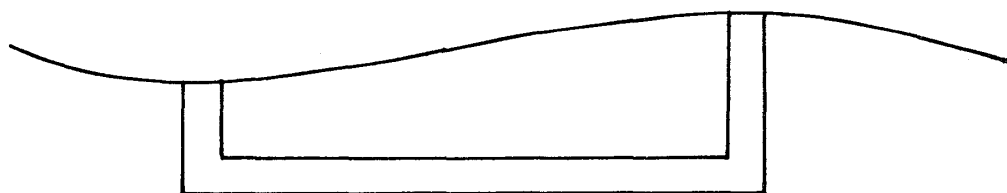
このように過去 15 年間の論文数の増加は、指数関数的であり、急激なものである。その増加の始まるところに戸田格子の論文が位置している。1980 年頃迄に 1 次元の問題が解決したところで増加は一段落している。

それでは今後はどうであろうか。まず近い将来の予想としては、2, 3 次元の問題、カオスの問題、厳密解を持たない場合の取扱いの問題等についての発展が見込まれ、図の破線部分のように再度論文数の増加が予想される。

ところで、このごろのソリトンの数学関係の研究会においてガウスの曲面論等 1700~1800 年代の古い論文が引き合いに出されることが多い。また波の問題に関しても、波そのものはギリシャ時代の昔から問題にされているが、それは別としてもたとえば Newton のプリンキピアに波の話が出てくる(第二編 1687 年)。そこでは、

$$\text{波の速さ} \propto \sqrt{\lambda} \quad (\lambda: \text{波長})$$

の関係を、導管中の水の上下運動に関係ずけて導いている。



導管中の水の質量が λ に比例すると考える。

この導き方の正否はともかく、今日知られているところの、深水波の速さが波長の平方根に比例するという関係と結果が同じであるのは興味深い。また流体力学の基礎方程式を作った L. Euler は 1707~83 年の人であり、L. de Lagrange は 1736~1813 年の人である (Lagrange は Euler のとちがう形式を求めたが、ある場合を除けば、Euler の形式の方がつかい易いことを認めている)。

今日のソリトンの知識は、このような長い間にわたる研究の上に出てきたものである。このことと同様に今日のソリトンの概念も、固体物理のエキソン同様、これから先 100 年、200 年たっても基本概念として生き残り、新たな発展の基礎となって受け継がれていくものと思われる。

1. 線形波動

非線形波動に進む前に、準備としてまず線形波動を扱い、いくつかの概念を用意しておく。

§ 1.1 正弦波

進行波の最も簡単なものは正弦波で

$$u(x, t) = a \sin(kx \pm \omega t + \delta)$$

と表わされる。ここで

$$\text{波数: } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\lambda: \text{波長})$$

$$\text{角周波数: } \omega = 2\pi\nu \quad (\nu: \text{振動数})$$

$$\text{波の速さ: } c = \frac{\omega}{k}$$

である。この最後の関係を用いて、波の特性を表わす k, ω を消去すると、

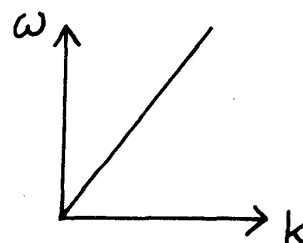
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となり、これは線形の微分方程式である。実際には、厳密にこれに従うのは真空中の電磁波くらいのものである。ところでこれは因数分解して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

となる。特に右へ進む波だけを考えることにすれば、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

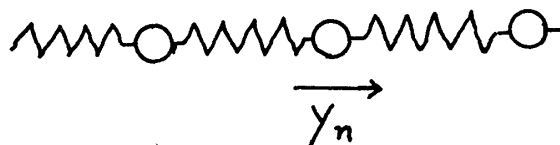


を考えるだけでよい。

ところで $c = \text{一定}$ とすると図のように ω と k の関係は直線的である。

§ 1.2 線形格子

図のようにバネでつながれた質量 m の質点を考える。各質点の平衡位置からの変位を、



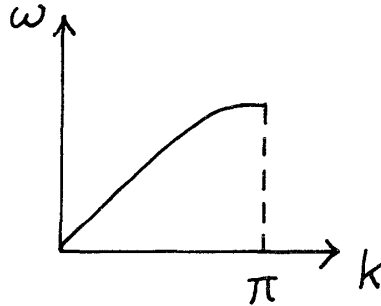
y_n で表わす。各質に働く力が Hook の法則に従うとして、

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = K(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})$$

このとき

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \sin \left| \frac{k}{2} \right|$$

であり、 ω と k の関係は直線ではなくなる。このことを、分散があるという。



§ 1.3 無限小の水面波

普通水面の波は中学、高校の教材で重ね合わせの例に出されるが、実はこれはよくない例である。特に無限小の波に限ったときにはじめて重ね合わせがきき、その場合の波の速さは

$$\text{浅水波} ; c = \sqrt{gh} \quad (h = \text{深さ})$$

$$\text{深水波} ; c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

である。一般には

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}}$$

と表わされ、上は $h \ll \lambda$ と $h \gg \lambda$ の場合に相当する。

2. 水面波

§ 2.1 流体力学

Euler, Lagrange によって流体力学の基礎方程式が樹立されたが、実際の条件に合わせてこれを解くのは大変難しい。

水面の波については日常観察する機会も多くその性質もよく知られている筈のものであるが、これを上の方程式で解こうとすると、自由表面の boundary condition があって大変難しい。従って水面の波の理論の発展には Euler, Lagrange 以後長い時間を要した。

§ 2.2 トロコイド波

これは完全流体の厳密な解として大変面白い。物理の本で見かけることはほとんどないが、水理学、工学的方面では必ず紹介される例である。

1802年にチェコスロバキアの F.J. von Gerstner が、初めて水面の波の理論を作った。以下定常的な波とともに進む座標系で考え、水平に x 軸を、鉛直上方に y 軸をとる。この系

で水の粒子が円形軌道をえがき、その半径が深いほど小さくなるような運動が可能であることを彼は示した。その運動は次のように表される

$$\begin{cases} x = a + r \sin \theta \\ y = b + r \cos \theta \end{cases}$$

位相は、波の伝播による位相の遅れのために

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda}(ct - \alpha)$$

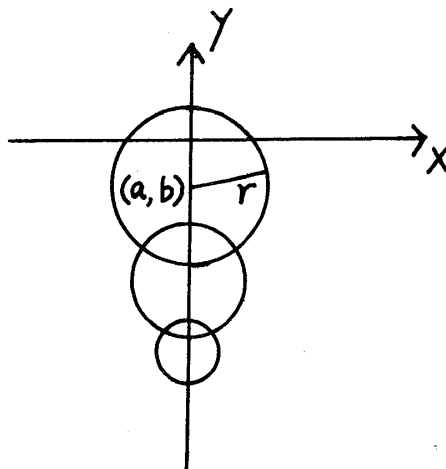
と表されるまた

$$r = r_0 e^{2\pi b/\lambda}$$

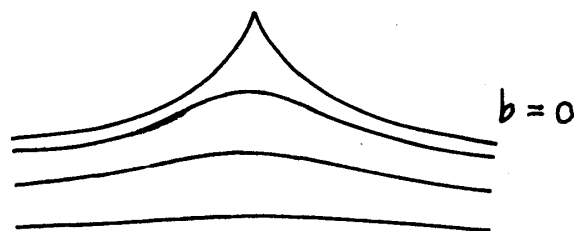
であり、 $b \rightarrow -\infty$ で $r \rightarrow 0$ をみたしている。さらに伝播する速さは

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

で表される。



$b = \text{一定}$ の表面は定圧力の面であり、これらはすべて自由表面になることができるものである。 $b = 0$ の場合はサイクロイドで、他はトロコイドであり、このことからこの波はトロコイ



$b = \text{一定}$ の面の断面図

戸田盛和

ド波とよばれる。

Gerstner の理論は、オーストリアの Weber 兄弟の興味を引き、水槽実験としては最初の実験を行った(1825年)。長さ5フィート、深さ1フィート、幅1インチの水槽による実験で、水ばかりでなく、水銀やブランデーも用いた。横はガラスで張り、水等を吸い上げてはおとす実験で、Gerstner の理論を確かめることができた。しかしこの水槽は無限に深いわけではなく、そのための理論とのずれはもちろんある。それにしても Gerstner といふ、Weber 兄弟といい、山国の人達が海の波に対する理論ともいうべきトロコイド波を扱ったのは面白いことである。

ところでトロコイド波は回転、すなわち渦があるので、厳密解ではあるが、流体の渦なしの話には適さない。特に粘性のない流体でははじめに渦がなければ、渦は発生しない。そこで次に渦のない有限振幅の波を考えてみる。

§ 2.3 完全流体の渦なしの波

水平方向に x 軸、鉛直上方に y 軸をとり、流れの速度の x 成分を u 、 y 成分を v で表わす。このとき縮まない条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

より流れの関数 $\psi(x, y)$ が存在して、

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

をみたし、また渦なしの条件

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

より速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ が存在して

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

をみたす。 ψ も ϕ も Laplace 方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

をみたす。また流線に沿って $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$ より

$$u dy - v dx = -d\psi = 0$$

だから、流れの関数は一定である。これら ψ , ϕ からさらに複素ポテンシャル w を次のように約束する。

$$w = \phi + i\psi$$

$$w = w(z), \quad z = x + iy$$

こうおくと、上の縮まないことと渦なしの条件は w が z の正則関数であることを表わす条件になっている。

§ 2.4 深水波, 弱い非線形性

渦なしの有限波高の定常波が x 軸の正方向に進む場合を考える。波の速さ c と同じ速さの流れを負方向に与え、波をとめて考える。次の複素ポテンシャルで与えられる流体の運動はこのような波に相当する。 c を平均流速として

$$w = \phi + i\psi = c(z - iy_0 - i\beta e^{-ik(z-y_0)})$$

ここで $z = x + iy$ であり

$$\phi = cx - c\beta e^{k(y-y_0)} \sin kx$$

$$\psi = c(y - y_0) - c\beta e^{k(y-y_0)} \cos kx$$

これは $y \rightarrow -\infty$ で $e^{ky} \rightarrow 0$ だから、運動がなくなるのは $y \rightarrow -\infty$ のときである(深水波)。流線は $\psi = \text{一定}$ で表わされるが、波の表面を $\psi = 0$ で表わすことにする。このとき

$$y - y_0 = \beta e^{k(y-y_0)} \cos kx$$

だから波高は β の大きさを表わされる。 β が小さいとして iteration で調べることが出来るが、表面で圧力一定となる条件から近似的に

$$c^2 = \frac{g}{k} + k^2 c^2 \beta^2$$

が得られる。ここで $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ とし $\beta \simeq 0$ とすると

$$c \simeq \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

となり、先のトロコイド波の速さに一致する。実際表面の形は近似的にトロコイドであるが、しかし渦なしの場合には波による水の移動があることを示すことができる。

3. 浅水波

有限な深さを持つ波の研究は Stokes や Rayleigh によってはじめられた。その孤立波の研究から KdV 方程式の厳密解の発見までをみていく。

§ 3.1 孤立波の発見

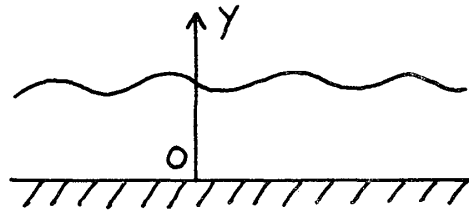
スコットランドの造船技師 Scott-Russel は 1834 年に運河で孤立波を発見した。それをきっかけに、長さ 20 フィートくらいの水槽をつくって実験し、波の速さの実験式

$$c = \sqrt{g(h+a)}$$

を得た。ここで h は深さ、 a は山の高さを表わしている。

§ 3.2 Rayleigh の研究 (1876)

Rayleigh は深さで展開する方法を用いた。図のように水底を $y=0$ とする。このとき複素



ポテンシャルを

$$w = \phi + i\psi = F(x + iy, t)$$

とおく。水が浅いから y はあまり大きくないとし、テイラー展開して、

$$w = e^{iy \frac{\partial}{\partial x}} F(x, t)$$

ここで水底では

$$\psi(x, 0, t) = 0$$

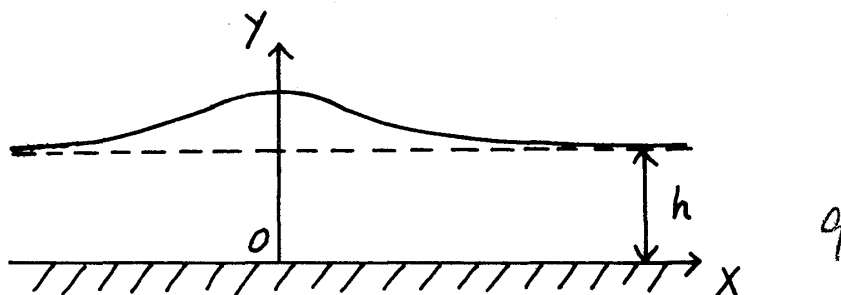
$$\phi(x, 0, t) = F(x, t)$$

である。水深が小さいので y について展開し

$$\phi = F - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{y^4}{4!} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \dots$$

$$\psi = y \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{y^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{y^5}{5!} \frac{\partial^5 F}{\partial x^5} - \dots$$

Rayleigh は波と同じ速さの反対方向の流れを考えて、時間によらない孤立波の形で調べ、Scott-Russel の定常的な孤立波の存在を導いた。



Rayleigh の理論について、詳しくは Lamb 著 Hydrodynamics をみられたい。

§ 3.3 Korteweg-de Vries の方程式 (1895)

Rayleigh の仕事と同じ方法であるが、ただ時間を入れて調べただけとも言える。Korteweg はオランダの大学の教授であり、de Vries はその学生である。

今水面を $y = y(x)$ で表わし、 $x \rightarrow \pm\infty$ で $y \rightarrow h$ とし、 $y - h = \eta$ とおいて、彼らは η に関する方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0$$

を得た。ここで

$$c_0 = \sqrt{gh}, \quad \xi = x - c_0 t$$

である。 c_0 は小さい波の進む速さを表わす。彼らは表面張力も考えているが、ここで考える波ではあまりきいてこないと思われる。そこで今日では表面張力をおとして、上の式を考えるのがふつうである。

§ 3.4 Korteweg-de Vries 方程式の孤立解

一般に前節の方程式は略して KdV 方程式とよばれる。変数 η, t, ξ はスケール変換により、順に u, t, x とおきかえて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

とできる。ここで t はもとの t とは違うスケールにとられている。係数とその符号は、スケールのとり方次第で思いのままになる。以下この式の解を考えることにする。Korteweg, de Vries はオリジナル論文にこれの2つの特解を出している。

まず定常解 $u = u(X)$, $X = x - ct$ について考える。ここで c は波が伝播する速さであり、波の形できまる定数であるが、これは未知の定数としておく。実際の波の速さは、これをスケール変換する前の量にもどし、KdV 方程式が速さ $c_0 = \sqrt{gh}$ で右へ進む座標を用いているの

戸田盛和

でさらに c_0 を加えて求まる。ところで今の場合

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -c \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} \rightarrow \frac{\partial^3}{\partial X^3}$$

より

$$-cu_X + 6u \cdot u_X + u_{XXX} = 0$$

まとめて

$$\frac{d}{dX}(-cu + 3u^2 + u_{XX}) = 0$$

よってかつこの中は定数で

$$u_{XX} = cu - 3u^2 + D$$

である。ここで D は積分定数である。さらにこれより

$$\frac{d}{dX} \left\{ \frac{1}{2} (u_X)^2 \right\} = (cu - 3u^2 + D) u_X = \frac{d}{dX} \left(\frac{c}{2} u^2 - u^3 + Du \right)$$

だから

$$\frac{1}{2} (u_X)^2 = -u^3 + \frac{c}{2} u^2 + Du + E$$

となる。 E は積分定数である。これは

$$\frac{1}{2} (u_X)^2 + U(u) = E$$

$$U(u) = u^3 - \frac{c}{2} u^2 - Du$$

のような形式に書け、これはちょうど非線形振動子の analogy である。ところで、 $U(u)$ は u の3次式であり、

$$U(u) = u(u + u_1)(u - u_2)$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{c^2}{4} + 4D} - \frac{c}{2} \right\}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{c^2}{4} + 4D} + \frac{c}{2} \right\}$$

とまとめられる。

上の式は

$$\frac{du}{\sqrt{2E-U(u)}} = dX$$

とも書け、これの積分が求める解を与える。解は積分定数 D, E によって異なるわけだが、一般にはこれを解くのは難しい。そこでまず特に $D=E=0$ の場合を考える。このとき $u_1=0, u_2=\frac{c}{2}$ であり、

$$\left(\frac{du}{dX}\right)^2 = u^2(c-2u)$$

より

$$\int \frac{du}{u\sqrt{c-2u}} = \int dX$$

よって

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-2u}}{\sqrt{c}+\sqrt{c-2u}} = X + \delta \quad (\delta \text{ は積分定数})$$

$$\sqrt{c}-\sqrt{c-2u} = (\sqrt{c}+\sqrt{c-2u}) e^{\sqrt{c}(X+\delta)}$$

$$\therefore u = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\sqrt{c}}{2} (X + \delta) \right\}$$

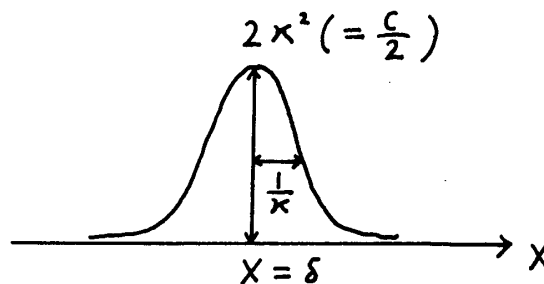
ここで $c = 4\kappa^2$ とおけば

$$u = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa (x - ct + \delta)$$

となる。ここで

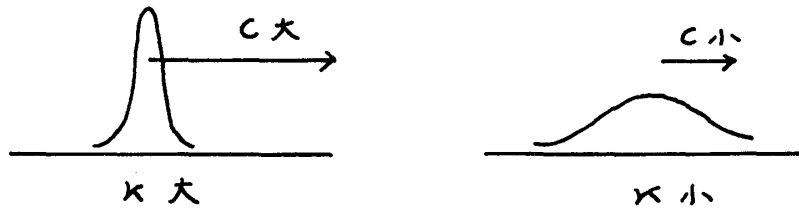
$$\operatorname{sech}^2 \xi = \left(\frac{1}{\cosh \xi} \right)^2 = \left(\frac{2}{e^\xi + e^{-\xi}} \right)^2$$

であり、この解は孤立波の解である。この波は κ で特徴づけられ、下図のようになる。



戸田盛和

ここで波の長さは $2\kappa^2 = \frac{c}{2}$ で表わされ、幅は $\frac{1}{\kappa}$ で与えられる。 κ の大小による波の特徴は図



のようになっている。また今は

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

を考えたため山形の孤立波が得られたが、KdV 方程式を

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

とえらんだ場合は $u < 0$ の谷形の孤立波解が得られる。

§ 3.5 cnoidal (クノイダル) 波 (周期解)

前節の積分は一般には複雑であるが、次のような周期解を仮定し、それが確かに解であることを示すことは比較的容易である。

今問題とする方程式は

$$u = u_\infty + A \operatorname{cn}^2 \kappa X$$

$$X = x - ct$$

の形の解を持つことを示す。ここで cn は Jacobi の cn (シーエヌ) 関数と呼ばれるものである。以下 Jacobi の楕円関数について簡単に解説した後、目的の計算にうつることにする。

まず

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} z$$

より $z = \sin u$ となるのに対し、

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \operatorname{sn}^{-1} z$$

より $z = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u, k)$ を定める。ここで k は母数とよび、

$$\begin{cases} k \rightarrow 0 \text{ で } \operatorname{sn} \rightarrow \sin \\ k \rightarrow 1 \text{ で } \operatorname{sn} \rightarrow \tanh \end{cases}$$

となる。cnは

$$\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = 1 \text{ かつ } \operatorname{cn} 0 = 1$$

という関係をみたすものであり、その符号は

$$k \rightarrow 0 \text{ で } \operatorname{cn} \rightarrow \cos$$

によって定める。さらに dn

$$\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \text{ かつ } \operatorname{dn} 0 = 1$$

という関係をみたすものであり、 $\operatorname{dn} \geq 0$ であるとする。

また

$$u = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

より

$$du = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

よって $z = \operatorname{sn} u$ として

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} &= \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)} \\ &= \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 x)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 x)} \\ &= \sqrt{\operatorname{cn}^2 x \cdot \operatorname{dn}^2 x} \end{aligned}$$

符号は $k \rightarrow 0$ に対して定めればよい。これからわかるように

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \\ \frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \end{array} \right.$$

という関係が成り立つ。

ところでこのことから $u = u_\infty + A \operatorname{cn}^2 \kappa X$ について

$$u_X = -2 \kappa A \operatorname{cn}(\kappa X) \operatorname{sn}(\kappa X) \operatorname{dn}(\kappa X)$$

戸田盛和

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_X)^2 &= 2\kappa^2 A^2 \operatorname{cn}^2(\kappa X) \{1 - \operatorname{cn}^2(\kappa X)\} \{1 - k^2 + k^2 \operatorname{cn}^2(\kappa X)\} \\ &= -\frac{2\kappa^2 k^2}{A}(u - u_\infty) \left\{ (u - u_\infty)^2 + \frac{1 - 2k^2}{k^2} A(u - u_\infty) - \frac{1 - k^2}{k^2} A^2 \right\} \end{aligned}$$

となる。これは先の

$$\frac{1}{2}(u_X)^2 = -u^3 + \frac{c}{2}u^2 + Du + E$$

と一致させることができる。このとき

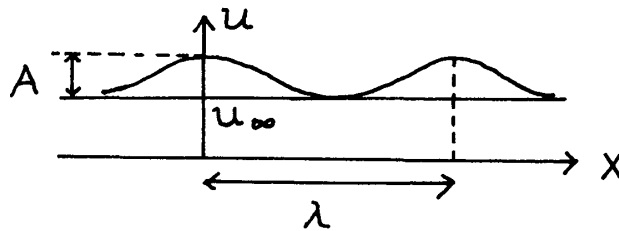
$$\begin{cases} \frac{2\kappa^2 k^2}{A} = 1 \\ 3u_\infty - 2(1 - 2k^2)\kappa^2 = \frac{c}{2} \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} A = 2\kappa^2 k^2 \\ c = 6u_\infty - 4(1 - 2k^2)\kappa^2 \end{cases}$$

である。 κ は波長に関係した量であるから、今の場合 k^2 が A で決る振幅に関係した量とみることができる。また u_∞, k, κ は勝手に与えることができる量であり、これらを決めると上の式から c が決まる。

cnoidal 波は正弦波に近いものである。



今波長を λ とすると、楕円関数の性質から、

$$\kappa \lambda = 2K(k)$$

よって

$$\kappa = \frac{2K(k)}{\lambda}$$

である。ここで

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

であり、これは第一種完全楕円積分とよばれる。これより $K(0) = \frac{\pi}{2}$ はただちにわかる。ところで sn , cn の周期は $4K(k)$ であり、 dn の周期は $2K(k)$ で与えられる。

ここまでのところは Korteweg と de Vries が出したのであるが、これ以上は当時としては、どうしようもなかった。

ところで、cnoidal 波で波長を無限に大きくした極限が孤立波に移行するためには、 $\lambda \rightarrow \infty$ と同時に $k \rightarrow 1$ とすればよい。

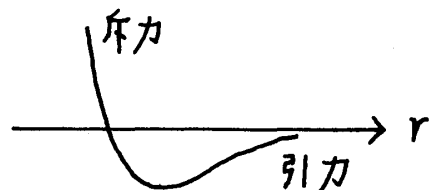
$$A = 2 \left(\frac{2K(k) k^2}{\lambda} \right) = \text{有限}$$

とする。この極限では $\text{cn} = \sqrt{1 - \text{sn}^2} \rightarrow \sqrt{1 - \tanh^2} = \text{sech}$ だから有限振幅のまま孤立波に帰着する。 $k \rightarrow 1$ をとらないと $\lambda \rightarrow \infty$ で $A \rightarrow 0$ となって有限振幅にはならない。

4. ソリトンの発見

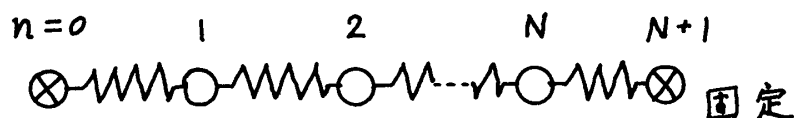
§ 4.1 フェルミの計算機実験 (~ 1953)

E. Fermi が考えた統計力学の問題はおよそ次のようである。まず結晶格子の熱振動により、原子(分子)が単振動をしているとする。しかし完全な単振動子の体系では、はじめに入れた基準振動がいつまでも残ってしまう。すなわちたくさんの保存量があってエネルギー面をうめつくす訳にはいかない(非エルゴード性)。よって熱的に統計力学の対象となるには調和振動子であることをやめなければならない。実際例えば van der Waals 力では非線形の部分が必要である。普通はエルゴード性が、非線形性や壁の影響のせいで保たれるという風に逃げているが、Fermi は非線形項を入れて計算機実験を行って非線形性の影響を実際に調べることにした。彼は相互作用のポテンシャルを

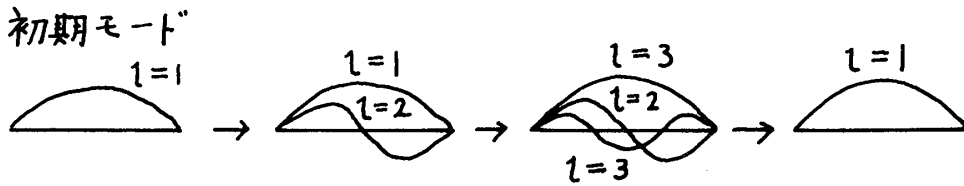


$$\phi(r) = \frac{\kappa}{2} r^2 - \frac{\kappa\alpha}{2} r^3$$

として3次の非線形項を入れ、これによってエルゴード的になるのではないかと期待した。系としては分子数 $N = 16$ 個、あるいは32個の1次格子を考え、両端を固定したものをとった。



これに対し、初期に例えば最低のモード ($\ell = 1$) を与えると、時間が経てばエネルギー等分配の法則により、すべてのモードのエネルギーが皆等しく ($\frac{k_B T}{2}$) になると期待したのである。しかし実際には第2 ($\ell = 2$)、第3 ($\ell = 3$) など数個のモードにエネルギーがいくだけで



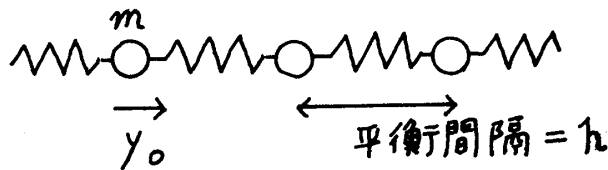
あり、しかもまたもとの状態に戻ってしまった。つまり予想に反して、非線形項があっても線形格子と似た振舞をし、エルゴード性は出てこなかったのである (§ 6.1 参照)。

§ 4.2 Zabusky の研究

一次元格子を考える。質量 m の各質点の変位を y_n とし、バネの伸びを

$$r_n = y_n - y_{n-1}$$

とする。また質点間の平衡距離を h とする。



この系の従う運動方程式は

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = \phi'(y_n - y_{n-1}) - \phi'(y_{n+1} - y_n)$$

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{2} r^2 + \frac{\kappa\alpha}{3} r^3$$

とする。Zabusky はこれの連続体近似を考えた。まず h が小さいとして、

$$y_{n\pm 1} = y_n \pm h \frac{\partial y_n}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 y_n}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 y_n}{\partial x^4}$$

とし、上の式に入れると

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c_0^2 \left(1 + \epsilon \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{c_0^2 h^2}{12} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$$\epsilon = 2\alpha h, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} h$$

となる。彼は最初 $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ の項をとらなかった。そうすると、図のような変な波が立ち、時間が経つとこわれてしまうことがわかった。そこでこの近似は不十分とわかり、次の4階微分の項

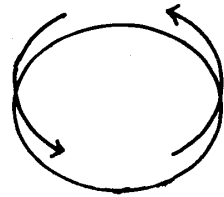


までとることにした。また Fermi は両端を固定した系を考えたが、Zabusky は周期条件を用いることで、無限に長い系を考えることにした。これによってたとえば右に進む波だけを考えればよいことになる。そこで、

$$\xi = x - c_0 t$$

$$u(\xi, \tau) = \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \varepsilon c_0 t$$



として、微分方程式を書き直すと、

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0$$

となる。ただしここで、 ε は微小量で ε^2 は無視できるとし、 h^2 と ε は同程度の微小量と仮定して

$$\mu = \frac{h^2}{12 \varepsilon} = \frac{h}{24 \alpha}$$

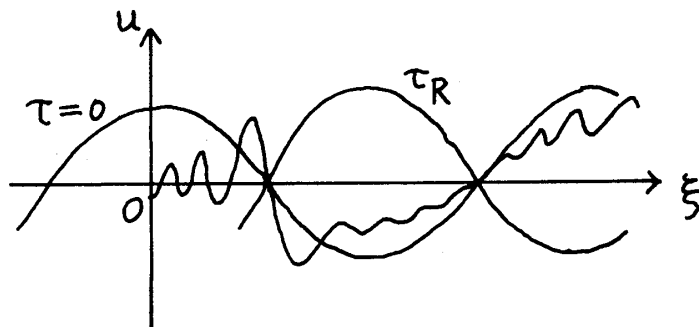
とおいた。結局この一次元格子系は KdV 方程式で近似できたことになった。

1960年代になってプラズマのある種の振動が KdV 方程式に従うこともわかり、Korteweg と de Vries がその方程式を出してから70年程して、KdV 方程式が復活することになった。

§ 4.3 ソリトンの発見

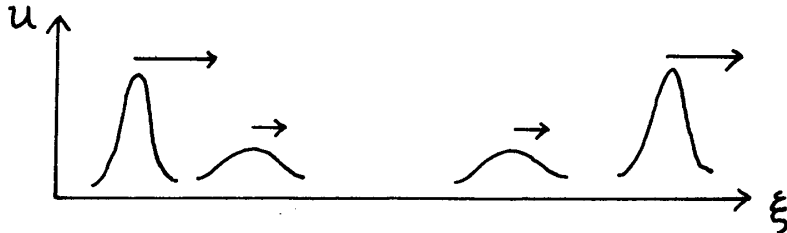
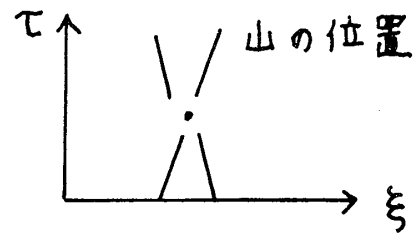
Zabusky と Kruskal は KdV 方程式の数値計算を行った(1965)。

$\tau = 0$ で cosine curve を与えたところ、時間と共に形がくずれ、再帰時間 τ_R の後、位置は変わるが、最初の cosine curve が出てきた。



戸田盛和

形がくずれていくのにつれて、いくつかの山が出てくるが、山と山が衝突すると、たがいに中をとおりぬけてまたもとの2つの山にもどることが確かめられた。またこれらの山は Korteweg の孤立波と同じであることが確かめられた。彼らはこれを soliton と名づけた。またこれらのソリトンは安定であるらしいこともわかった。



KdV のこの結果から、波の運動はソリトンの集りであるという認識をした方がよいということになったのである。

§ 4.4 2ソリトン解

KdV 方程式の2ソリトン解は P.D. Lax がはじめて得ているが、ここでは最近の方法で導くことにする。

KdV 方程式はソリトン解

$$u = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - ct + \delta)$$

$$c = 4\kappa^2$$

を持つことは先にみた通りである。2ソリトン解を表すためには、まずこれを

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \{ \cosh \kappa(x - ct + \delta) \}$$

と書き直しておくのが都合がよいとわかってきた。このように書けることは、たとえば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \log \cosh \kappa(x - ct + \delta) \\ &= \frac{\kappa \sinh \kappa(x - ct + \delta)}{\cosh \kappa(x - ct + \delta)} \\ &= \kappa \tanh \kappa(x - ct + \delta) \frac{\partial}{\partial x} \tanh \kappa(x - ct + \delta) \\ &= \kappa \operatorname{sech}^2 \kappa(x - ct + \delta) \end{aligned}$$

からわかる。ここで

$$\cosh \kappa x = \frac{e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}}{2} = \frac{e^{-\kappa x}}{2} (1 + e^{2\kappa x})$$

より

$$\log \cosh \kappa x = -\kappa x - \log 2 + \log(1 + e^{2\kappa x})$$

となる。 $-\kappa x - \log 2$ は x で2度微分すると0になる。このことからわかるように

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \{1 + e^{2\kappa(x-ct+\delta)}\}$$

としてもよい。

この拡張としてたとえば、

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \psi(x, t)$$

$$\psi(x, t) = 1 + A_1 e^{2\eta_1} + A_2 e^{2\eta_2} + A_3 e^{2(\eta_1 + \eta_2)}$$

をとる。ただし

$$\begin{cases} \eta_1 = \kappa_1 x - \beta_1 t + \delta_1 \\ \eta_2 = \kappa_2 x - \beta_2 t + \delta_1 \end{cases}$$

である。これが、

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

をみたすことが示せる。ただしそのためには、

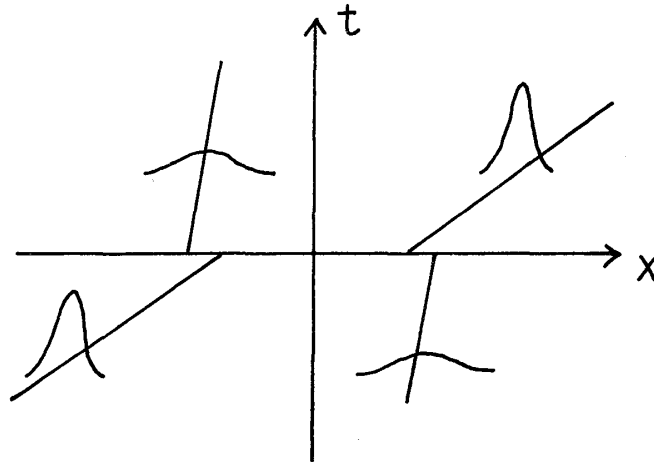
$$A_3 = \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \right)^2 A_1 A_2$$

$$\beta_1 = 4\kappa_1^2$$

$$\beta_2 = 4\kappa_2^2$$

でなければならない。ここで A_1, A_2 は任意に選べるが、このことは δ_1, δ_2 が任意に選べることと同じである。こうして得られた解を調べた結果、図のように2つの山が動いていくことがわかった。

A_1, A_2 は任意に選べるから、 $A_1 = \frac{1}{2\kappa_1}$, $A_2 = \frac{1}{2\kappa_2}$ とおくと、



$$\psi(x, t) = \det B$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^{2\eta_1}}{2\kappa_1} & \frac{e^{\eta_1 + \eta_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} \\ \frac{e^{\eta_1 \eta_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} & 1 + \frac{e^{2\eta_2}}{2\kappa_2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\delta_{ij} + \frac{e^{\eta_i + \eta_j}}{\kappa_i + \kappa_j} \right)$$

と書ける。これを n パラメタ $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$, $n \times n$ 行列 B へ拡張することができるが、そのためには大変面倒な計算をしなければならない。たとえば3個としても $\psi(x, t) = 1 + A_1 e^{2\eta_1} + \dots$ は大変複雑である。一般にこのように個数を増していくと、腕力と紙をうんと消費しなければならない。このような計算をするためには、これでうまくいくんだという信念を持ってあたるのが大切になってくる。広田良吾氏は、この計算を見通しよくしようとして自分の計算法を考え出したといっている。いずれにしても \log の微分の形で非線形方程式の解を書くのは、今日では常識になっている。

形式的に上の方法よりうまい方法はないかということを探ることから1965年以後の発展が続くことになるが、その1つに逆散乱法の発見があり、これを次に述べることにする。

5. KdV 方程式とこれに付随する Schrödinger 方程式

§ 5.1 逆散乱法の発見

KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

に対し, Burgers 方程式

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad (\nu > 0)$$

は x の 3 階微分が 2 階微分になっているだけで, 互いに似た形の方程式である。しかしこちらは,

$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \log \psi$$

とおくことによって線形の熱伝導形方程式,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

に帰着し, 簡単であることがわかる。KdV 方程式についてもこのような線形化法がないものかと調べられたが, 見つけることはできなかった。他に非線形微分方程式で, うまく線形化できるよく知られた例に Riccati 方程式,

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + R(x) = 0$$

がある。これは $y = \frac{u'}{u}$ とおくことによって,

$$u'' + R(x)u = 0$$

のように線形化される。ところで KdV 方程式もついに積分方程式の意味で線形化されることになる。

まず Gardner–Greene–Kruskal–Miura のプリンストングループ (GGKM) は Phys. Rev. Lett. 19 (1967)1095 に数頁ではあるが, 大変重要なことを報告した。ここで KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

に対し, Schrödinger 方程式

$$-\varphi_{xx} + u\varphi = \lambda\varphi$$

を考える。これを

$$u = \lambda + \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}$$

戸田盛和

と書き直し, KdV 方程式に入れた結果は,

$$\lambda_t \varphi^2 + [\varphi Q_x - \varphi_x Q]_x = 0$$

$$\begin{cases} Q = \varphi_t - B\varphi \\ B = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x \end{cases}$$

とまとまる。これを x について積分し, 無限遠方の性質を仮定して $\int_{-\infty}^{\infty} [\]_x dx = 0$ とすると,

$$\lambda_t \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx = 0$$

である。 φ = 実数としてよいから $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx \neq 0$ として, これより

$$\lambda_t = \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

よって今考える Schrödinger 方程式の固有値は時間によらないことがわかる。これは大変重要な結果である。ところで $\lambda_t = 0$ より

$$[\varphi Q_x - \varphi_x Q]_x = 0$$

であるが, $Q=0$ ならこれが成り立つのに十分である。 $\varphi Q_x - \varphi_x Q$ は必ずしも 0 でなくてもよいので任意性は残る。しかし $Q=0$ とすると

$$\varphi_t = B\varphi$$

である。これを KdV 方程式のかわりに解けば, φ より u が求まる。たとえば十分遠方 $x \rightarrow \pm\infty$ で $u \rightarrow 0$ とすると, 十分遠方での φ は

$$\varphi_t = -4\varphi_{xxxx} \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

である。遠方で $u \rightarrow 0$ となるときは, 束縛状態の固有値, その遠方での漸近形及び遠方で $e^{\pm i kx}$ となる波の反射係数で与えられると, それからポテンシャル u を求めることができる。一般にポテンシャル u を与えて φ を求めるのが Schrödinger 方程式を解くということだが, φ の知識から u を求めるのは Schrödinger 方程式の逆問題である。KdV 方程式は上のように Schrödinger 方程式の逆問題の形で解けることがわかったわけである。上では $u_t + 6uu_x + u_{xxxx} = 0$ のかわりに $u_t - 6uu_x + u_{xxxx} = 0$ をえらび, ソリトン解 u が束縛状態を持つ谷形ポテンシャルとなるようにしている。

KdV 方程式 $u_t - 6uu_x + u_{xxxx} = 0$ と, 線形方程式の組 $-\varphi_{xx} + u\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi_t = B\varphi$ の関

係は P.D. Lax によって一般的な形にまとめられた(1968)。たとえば

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u$$

$$B = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x$$

とすると

$$L\varphi = \lambda\varphi$$

$$\varphi_t = B\varphi$$

である。ここで L と B を Lax pair という。このとき $L\varphi = \lambda\varphi$ すなわち

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u\right)\varphi = \lambda\varphi$$

の両辺を t で微分し、 $\lambda_t = 0$ を用いると

$$u_t\varphi + L\varphi_t = \lambda\varphi_t$$

ここで $u_t\varphi = L_t\varphi$, $L\varphi_t = LB\varphi$, $\lambda\varphi_t = \lambda B\varphi = B\lambda\varphi = BL\varphi$ だから

$$L_t\varphi + LB\varphi = BL\varphi$$

より

$$L_t\varphi = (BL - LB)\varphi$$

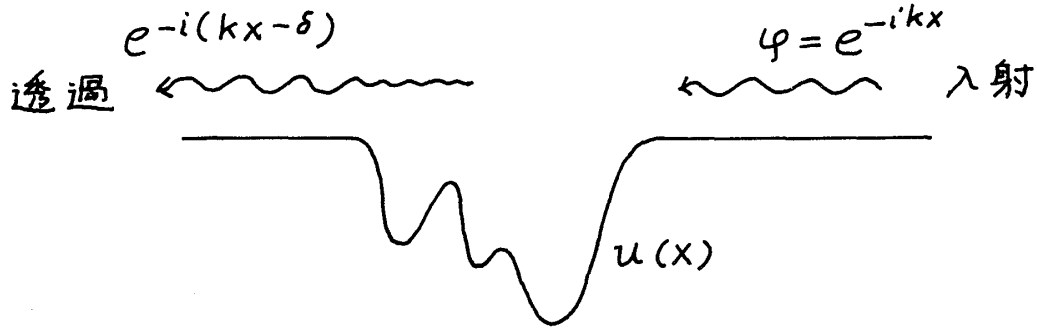
これから演算子に関する式

$$L_t = BL - LB$$

が得られる。これを Lax 形式という。この式から KdV 方程式が出る。先には KdV 方程式は $L\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi_t = B\varphi$, $\lambda_t = 0$ から出たのであった。Lax の研究により GGKM がやみくもに計算した手法が、一般の非線形問題を解く手法として意味があることが示されることになった。

§ 5.2 Schrödinger 方程式に対する Kay と Moses の研究

I. Kay と H.E. Moses の逆散乱法を扱った論文は数多いが、J. Appl. Phys. 17 (1956) 1503 に載った短い論文は大変わかりやすい。そこで以下それに沿って説明する。それは電磁波に対して無反射で透明な物体の満すべき条件を論じたものである。もしもそのような飛行機を作ることが可能なら、レーダーで見つからないわけである。



結局図のように phase はかわってもよいが入射波がすべて透過し、無反射であるためには、ポテンシャル $u(x)$ の形がソリトンの集まりになっていけばよい。しかし、実際にはソリトンは無限の size の尾を引いているのに対し、物体は有限の size ということから表面で必ず反射が出るのは避けられない。

ところで彼らの議論は大変わかりやすいので、それに従って Schrödinger 方程式を解くことを考えてみる。たとえば、

$$-\varphi_{xx} + u\varphi = \lambda\varphi$$

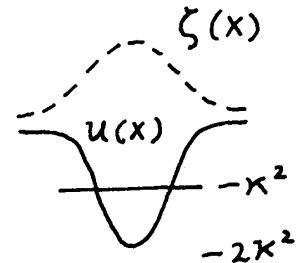
$$u = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x-x_0)$$

を考える。これは $\lambda = -\kappa^2$ の束縛状態を 1 本持つことがわかる。その状態は

$$\varphi = \zeta(x) = C \operatorname{sech} \kappa(x-x_0)$$

また $\lambda = k^2$ でやってくる波については、

$$\varphi(x) = \frac{1}{ik + \kappa} \{ ik + \kappa \tanh \kappa(x-x_0) \}$$



となる。これは連続スペクトルを持ち、漸近形として

$$\varphi(x) \longrightarrow e^{-ikx} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$\longrightarrow e^{-i(kx-\delta)} \quad (x \rightarrow -\infty)$$

をとる。ここで

$$e^{i\delta} = \frac{ik - \kappa}{ik + \kappa}$$

であるが、 k, κ は実数だから $\left| \frac{ik - \kappa}{ik + \kappa} \right| = 1$ である。よって $\delta = \text{実数}$ で、波は完全透過する。

一般のポテンシャルの場合について、Kay と Moses は大変うまいやり方をした。そのためまず上の1パラメタの $u(x)$ の例について少し書き直しておく。すなわち、

$$\begin{aligned} u &= -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x-x_0) \\ &= -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \left(1 + \frac{c^2 e^{-2\kappa x}}{2\kappa} \right) \end{aligned}$$

ここで $c = \sqrt{2\kappa} e^{\kappa x_0}$ である。これに対して束縛状態は

$$\zeta(x) = C \operatorname{sech} \kappa(x-x_0) = \frac{c e^{-\kappa x}}{1 + \frac{c^2}{2\kappa} e^{-2\kappa x}}$$

である。これに対して N 個の固有値 $-\kappa_1^2, -\kappa_2^2, \dots, -\kappa_n^2, \dots, -\kappa_N^2$ に対応する束縛状態を考える。まず $\zeta_1(x), \zeta_2(x), \dots, \zeta_n(x), \dots, \zeta_N(x)$ が、

$$\zeta_n(x) + \sum_{m=1}^N \frac{c_n c_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} \zeta_m(x) - c_n e^{-\kappa_n x} = 0$$

をみたすとする。この ζ は行列式をつかって解くことができる (c_n は与えられた定数とする)。

この ζ_n は

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \kappa_n^2 + u(x) \right\} \zeta_n(x) = 0$$

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^N c_n \zeta_n(x) e^{-\kappa_n x} \right)$$

をみたす。ここで定数 c_n は勝手に与えることができ、これを与えると ζ_n がきまり、 $u(x)$ がきまるのだが、これはソリトンの場所を与えることに相当する。一方これに対して、連続スペクトルに相当する状態は

$$\varphi(x, k) = \left\{ 1 - \sum_{n=1}^N \frac{c_n \zeta_n(x)}{ik + \kappa_n} e^{-\kappa_n x} \right\} e^{-ikx}$$

と書ける。以上で $N=1$ とおいたものは先の1パラメタの場合の結果に一致する。

上の一般の場合の $u(x)$ はさらに

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \det A$$

$$A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{c_n c_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m}$$

と書くことができる。これが一般の無反射ポテンシャルを与えるのである。ここまでのところ

戸田盛和

時間が入っていない議論である。

§ 5.4 逆散乱法

ここでは証明は略して、要点を述べるだけにしておく。

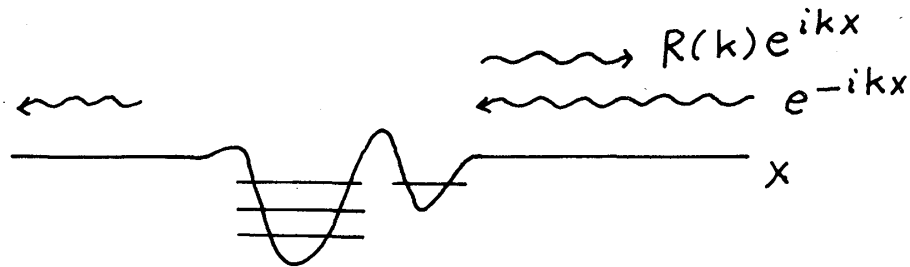
KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

に付随する Schrödinger 方程式

$$-\varphi_{xx} + u\varphi = \lambda\varphi$$

を考える。ここで初期条件 $u(x, 0)$ が given とする。また境界条件としては $x \rightarrow \pm\infty$ で $u \rightarrow 0$ となるものとする。これに対してまず Schrödinger 方程式を解く。ここで bound state



の固有値を $-\kappa_1^2, -\kappa_2^2, \dots$ とし、束縛状態の波動関数の漸近形を

$$\zeta_n(x) \longrightarrow c_n e^{-\kappa_n x} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

とする。これら及び反射係数 $R(k)$ により、

$$\{-\kappa_n^2, c_n, R(k)\} \quad (\text{散乱データという})$$

が得られたことになる。これを与えたとき、あとで積分核に用いる関数

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t)^2 e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{ikx} dk$$

を定める。第1項は N 個のソリトンに関係した項で、第2項は反射に関する項である。さらに散乱データの時間変化は $x \rightarrow \infty$ で

$$(\zeta_n)_t \simeq -4(\zeta_n)_{xxxx}, \quad \varphi_t \simeq -4\varphi_{xxxx} \quad (x \rightarrow \infty)$$

からきまり

$$c_n(t) = c_n e^{4\kappa_n^3 t}$$

$$R(k, t) = R(k) e^{i8k^3 t}$$

となる。すなわち散乱データというのは遠方のデータだけで決まるべきものである。上の散乱データに κ_n^3, k^3 が表れているのは φ_{xxxx} のためである。

このように与えられた kernel $F(x, t)$ に対し, 方程式

$$\kappa(x, y; t) + F(x+y; t) + \int_x^\infty \kappa(x, z; t) F(z+y; t) dz = 0$$

を考える。これを Gel'fand-Levitan-Marchenko 方程式, 略して GLM 方程式という。

これは κ について1次であり, 解くことができる。そうすると

$$\varphi = e^{-ikx} + \int_x^\infty \kappa(x, y) e^{iky} dy$$

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \kappa(x, x; t)$$

によって φ, u が求まることになっている。特に $u(x, t)$ は κ の diagonal part から決まるようになっている。

ところでもとの系はソリトン以外の解も含んでいる。しかしさざ波のようなものはさっと散って, ソリトンだけが残る。ソリトンだけの場合なら先にみたように無反射の場合を考えればよい。そこで $F(x, t)$ の中の $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{ikx} dk$ の項は一般に重視されない。



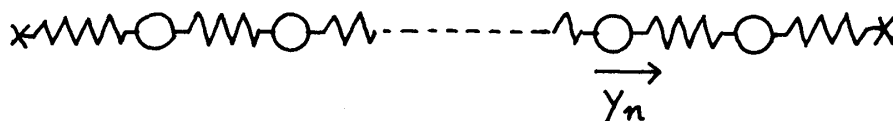
さざ波の energy は一般に大したことはない。

特に無反射の場合, $R(k) = R(k, t) = 0$, を考えることによって多ソリトン解が容易に求められることがわかった。

6. 非線形格子

§ 6.1 Fermi-Pasta-Ulam の計算機実験

両端を固定した1次元のバネにつながれた粒子を考える。各粒子の変位は y_n とする。とな



り合う粒子間の距離を r として、その相互作用のポテンシャルを

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{2} r^2 + \frac{\kappa\alpha}{3} r^3$$

とする。粒子の個数は全部で N とする。彼らは $N = 32, 64$ の場合を扱った。両端の固定を

$$y_0 = y_{N+1} = 0$$

で表わすことにして、 l で表わされるモードの変位を

$$y_n = A_l \sin \frac{l\pi n}{N+1}$$

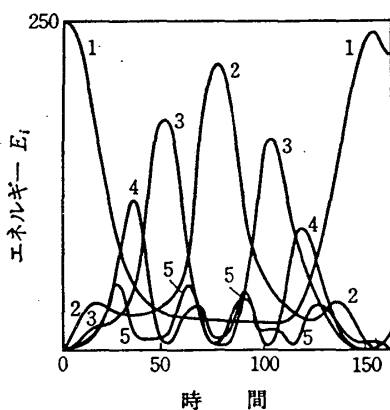
のように表わすことにする。運動はいくつかのモードの重ね合せとして表わすと、

$$y_n(t) = \sum_{l=1}^N A_l \sin \frac{l\pi n}{N+1} \cos \omega_l t$$

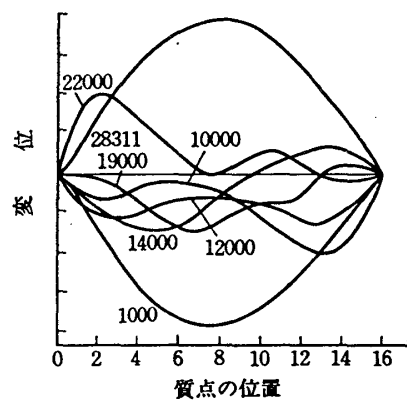
とすると、各瞬間のモードの振幅から energy がわかることになる。初期条件としては最低のモード $l=1$ がとられた。その結果は前にも述べたが、図のようであった。

ここで計算機実験の誤差等の問題はもちろんあって、東大の人の追試ではきれいに再帰しないという結果が得られている。

いずれにしても非線形の基準振動のモードがあってこれがきれいに振動するのではなかろうかと思われる。摂動論を用いてそれらしいものがあることも確かめられている (Ford)。



Fermi-Pasta-Ulam の再帰現象



振動の再帰の様子。数字は時間 (単位は左図と異なる)。

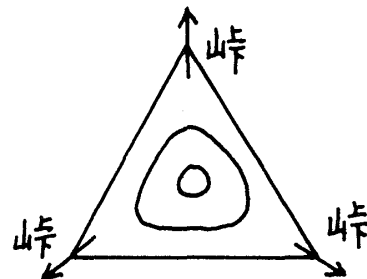
§ 6.2 Hénon Heiles の計算機実験

ニース天文台の Henon とその学生 Heiles は、天文学の問題で、軸対称の galaxy 中の星の運動を調べるために以下のような体系について計算機実験を行い、§ 6.1 とは逆の結果を得た。

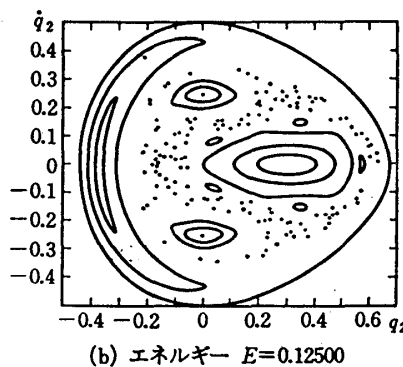
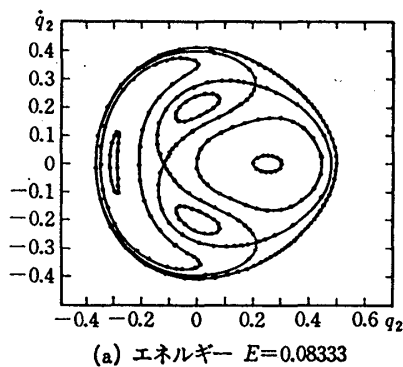
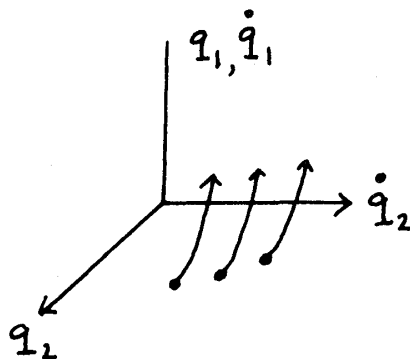
まずハミルトニアンとして、

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$$

をとる。ここで q_1, q_2 を用いて表わされる項は位置エネルギーを表わす。式の形ではわかりにくいですが、これは正三角形の symmetry を持ったポテンシャルを表わしている。十分な energy を持った粒子は図の正三角形の領域から escape することができる。



この系は力学系としてみれば $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$ の4次元の問題であるが、2次元平面への Poincaré mapping をとった結果は以下の図のようになる。

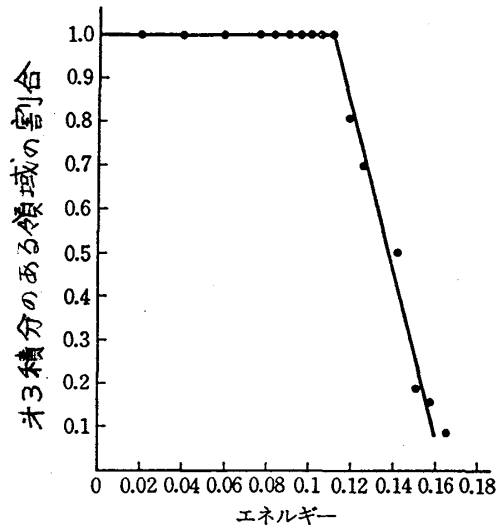


Hénon-Heiles の Poincaré 写像

エネルギーが小さいときには Poincaré mapping はなめらかな曲線にのり、このことは、エネルギー積分のほかにはゆるる第3積分があることを示している。一方エネルギーが大きくなると、第3積分があるように見える部分と、そうでない部分があるように見える。それらの部分の面積比をとると図のようになるが、これらがきれいな2つの部分に分かれるかどうかについては疑問も残されている。

一方 Ford によって、3粒子の周期的な格子で、そのハミルトニアンが、

$$H = H_0 + H'$$



$$H_0 = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2} [(Q_1 - Q_2)^2 + (Q_2 - Q_3)^2 + (Q_3 - Q_1)^2]$$

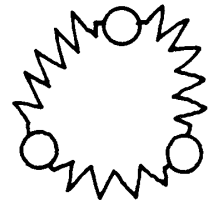
$$H' = \frac{\alpha}{3} [(Q_1 - Q_2)^3 + (Q_2 - Q_3)^3 + (Q_3 - Q_1)^3]$$

で表わされるものは、Hénon-Heiles の体系とまったく同等であることが示された。3次の非線形項があると、一般に energy が高いとき非常に不安定な動きをする可能性がある。

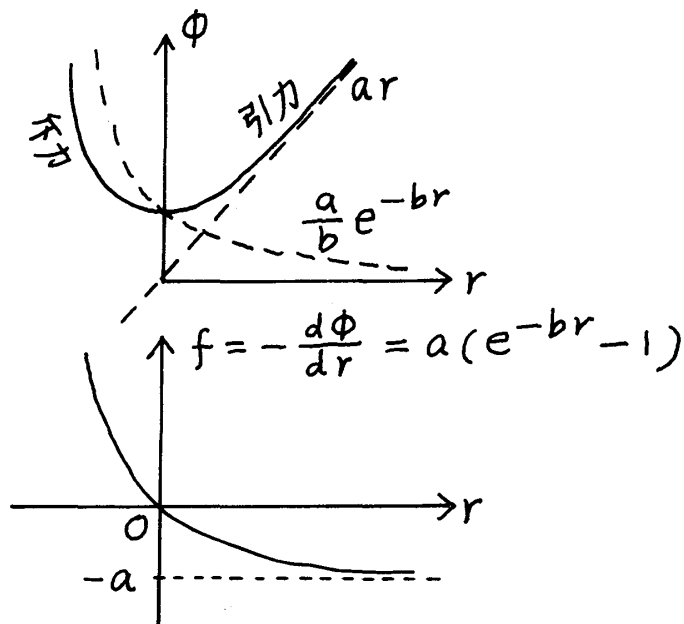
§ 6.3 指数格子 (Toda, 1967)

やはりバネでつながれた1次元格子で、その相互作用が

$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar$$



で表されるものを考える。



$r_n = y_{n+1} - y_n$ とすると,

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = a \{ e^{-b(y_n - y_{n-1})} - e^{-b(y_{n+1} - y_n)} \}$$

より

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}})$$

ここで $\kappa = ab = \text{finite}$ を保って $b \rightarrow 0$ とすると線形格子に帰着し, $b \rightarrow \infty$ とすると剛体球の場合に帰着する。

ところでこの系は楕円関数で書ける周期的な解を持つ。すなわち,

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{(2K\nu)^2}{ab/m} \left[\text{dn}^2 \left\{ 2 \left(\frac{n}{\lambda} - \nu t \right) K \right\} - \frac{E}{K} \right]$$

ここで λ は波長, ν は振動数であり,

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{第1種完全楕円積分})$$

$$E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad (\text{第2種完全楕円積分})$$

である。また

$$\overline{f_n} = a(e^{-br_n} - 1) = 0 \quad (- \text{は平均})$$

$$2K\nu = \sqrt{\frac{ab}{m}} \bigg/ \sqrt{\frac{1}{\text{sn}^2(2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K}}$$

である。

上の式はバネの力 f_n を用いた方が便利であり,

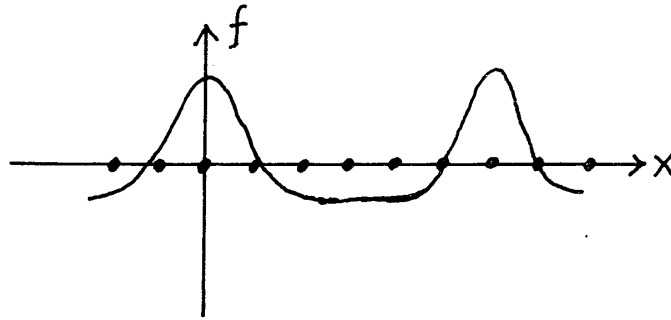
$$\frac{d^2}{dt^2} \log \left(1 + \frac{f_n}{a} \right) = \frac{b}{m} (f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n)$$

$$f_n = a(e^{-br_n} - 1) \propto \text{dn}^2 - \frac{E}{K} \quad (\text{周期解})$$

のようになっている。この周期解は discrete などどころだけしか意味がないとしても, 連続な形で求まる。

指数型の相互作用をする系の計算機実験が, Saito, Ford らによってなされたがここで Ford による3粒子の周期格子の例を述べる。ハミルトニアンは,

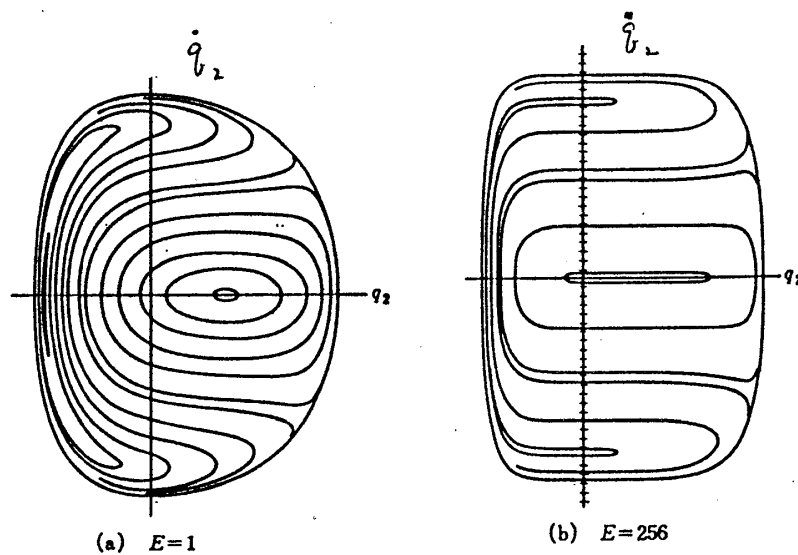
$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + e^{-(Q_1 - Q_2)} + e^{-(Q_2 - Q_3)} + e^{-(Q_3 - Q_1)} - 3$$



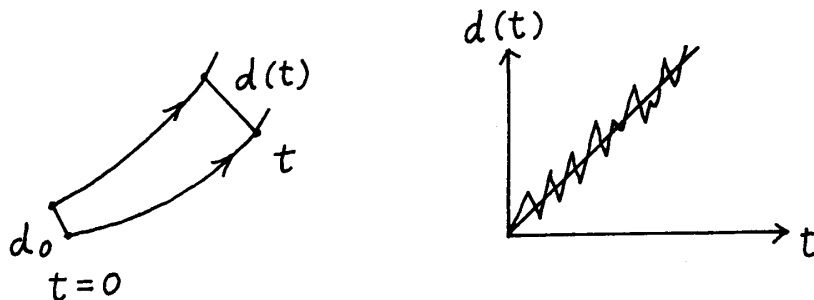
であるが、§ 6.2 と同じ正準変換をすると

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{24}(e^{2q_2 + 2\sqrt{3}q_1} + e^{2q_2 - 2\sqrt{3}q_1} + e^{-4q_2} - \frac{1}{8})$$

となる。これは 4次元の力学系であり、 q_2, \dot{q}_2 面での Poincaré mapping は図のようにな



った。今度は E を大きくしてもすべての点はなめらかな曲線にのり、3次の非線形性の場合と違って、指数型格子では第3積分を持つことが明らかになった。このことは Saito の例でも同様である。ところで mapping がなめらかな曲線にのって、ストカスティックな領域がないということは、位相空間での軌道が安定なことを意味する。位相空間の中で少しだけ離れた2点間の距離が時間と共にどう変化するかをみたときに、だいたい linear に変化していれば第3積分があることを意味する。



指数格子とその周期解は15年前の夏、Fermi の計算をヒントに発見した。その翌年に半年間京大にいたとき巽研で KdV の孤立解の話聞き、先の周期解で $\lambda \rightarrow \infty$ のときソリトンになるだろうという考えで、

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{m}{ab} \beta^2 \operatorname{sech}^2(\kappa n \pm \beta t)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \kappa$$

を発見し、次いで2つのソリトンの衝突を表わす解をさがして2ソリトン解を見出した。

§ 6.4 ソリトン解と2ソリトン解

力 f_n に対して

$$f_n = a(e^{-br_n} - 1) = \frac{d^2 S_n}{dt^2}$$

をみたす S_n を用いると、ソリトン解は

$$S_n = \frac{m}{b} \log \cosh(\kappa n \pm \beta t)$$

と表される。ここで S_n はどうせ微分を2回とるから、 $\cosh(\kappa n \pm \beta t)$ の部分を $1 + e^{2(\kappa n \pm \beta t)}$ でおきかえてもかまわない。また2ソリトン解は、

$$S_n = \frac{m}{b} \log [1 + A_1 e^{2(\kappa_1 n - \beta_1 t)} + A_2 e^{2(\kappa_2 n - \beta_2 t)} + A_3 e^{2\{(\kappa_1 + \kappa_2)n - (\beta_1 + \beta_2)t\}}]$$

と表される。ところで S_n に対する運動方程式は

$$\log \left(1 + \frac{d^2 S_n}{dt^2} \right) = \frac{b}{m} (S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n)$$

だから、上の解をこれに入れると、

$$\beta_1^2 = \frac{ab}{m} \sinh^2 \kappa_1$$

$$\beta_2^2 = \frac{ab}{m} \sinh^2 \kappa_2$$

$$A_1 A_2 = \frac{\frac{m}{ab} (\beta_1 + \beta_2)^2 - \sinh^2(\kappa_1 + \kappa_2)}{\sinh^2(\kappa_1 - \kappa_2) - \frac{m}{ab} (\beta_1 - \beta_2)^2} A_3$$

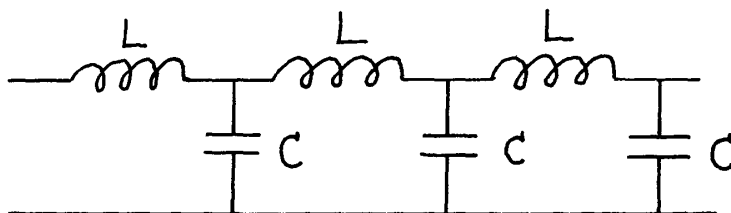
戸田盛和

を得る。このように β_1, β_2, A_3 は $\kappa_1, \kappa_2, A_1, A_2$ を与えると決まる。 κ_1, κ_2 は任意だが、 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ でなければならない。また β_1, β_2 が同符号なら2つのソリトンは同方向に進み、異符号なら反対方向に進む。

$\beta_1 \neq \beta_2$ だから $t \rightarrow \pm\infty$ では2つのソリトンは十分離れる。また2つのソリトンの衝突、追越しの場合には一方のソリトンにくっついてまた離れるというふうになる。または他をくぐり抜けていくといってもよい。

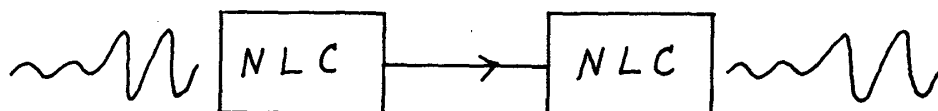


この計算を出した時に、当時 RCA にいた広田氏（現在広島大）が、この系と等価の電気回路を作れることを示した（Hirota-Suzuki）。図の C は非線形のキャパシターである。この



ような100個の element を並べて Fermi の再帰現象やソリトンの衝突を再現させることができた。

これを用いると暗号の送信に利用できるかも知れないということである。たとえば信号を発生させて非線形回路で modulate し、普通の回路で送る。これを非線形の回路で受けると、再帰現象でもとの信号にもどるというわけである。



§ 6.5 指数格子の保存量

サイクリックな N 個粒子の指数格子には、第3積分どころか N 個の保存量が存在することがわかった。このことは Hénon と Flaschka が独立に発見した。一方 KdV 方程式には無限の保存量が存在することがわかっている。ところで Hénon の方法はきれいであるが数学的でわかりにくい。それに対して Flaschka の方法は我々にはわかりやすい。そこでまず Flaschka の方法について紹介する。

まず dimensionless form で考えて、

$$\begin{aligned}\phi(r_n) &= e^{-r_n} + r_n \\ r_n &= Q_{n+1} - Q_n\end{aligned}$$

次元のない指数格子系の運動方程式は,

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = P_n \\ \dot{P}_n = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \end{cases}$$

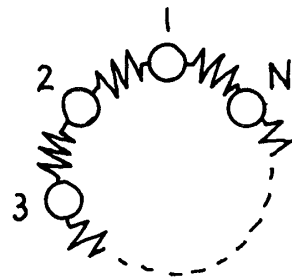
ここで

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)/2} \\ b_n = \frac{1}{2} P_n \end{cases}$$

という変数 a, b をとる。これは正準共役ではない。とにかくこうとると,

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n (b_n - b_{n+1}) \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \end{cases}$$

のように非線形の簡単な方程式を得る。この運動方程式は matrix 方程式になる。



$$\begin{aligned}a_{n+N} &= a_n \\ b_{n+N} &= b_n\end{aligned}$$

サイクリックな系に対し対称行列 L と, 反対称行列 B を,

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & \\ 0 & a_2 & b_3 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N & & & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & a_N \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & -a_{N-1} \\ -a_N & & & & & & a_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

によって与え、Lax の運動方程式

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB$$

を作ってみると、1st off-diagonal part から $\dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1})$ が、また diagonal part から $\dot{b} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2)$ が出てくる。

今 B が反対称だから、

$$\frac{dU}{dt} = BU \quad ; \quad U \text{ は時間の関数で } U(0) = 1$$

を考えると、

$$\frac{dU^{-1}}{dt} = -U^{-1}B$$

も成り立ち、

$$UU^{-1} = U^{-1}U = 1$$

である。このことは次のように証明される。

まず $\frac{dU}{dt} = BU$ より

$$\frac{dU^\dagger}{dt} = U^\dagger B^\dagger = -U^\dagger B$$

よって

$$\frac{d}{dt}(U^\dagger U) = \frac{dU^\dagger}{dt}U + U^\dagger \frac{dU}{dt} = -U^\dagger BU + U^\dagger BU = 0$$

一方 $U(0) = 1$ だから、 $U^\dagger U = 1$ がすべての時刻で成り立ち、 $U^\dagger = U^{-1}$ である (証明終)。

この U を用いて、

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) = -U^{-1}BLU + U^{-1}\frac{dL}{dt}U + U^{-1}LBU$$

$$\begin{aligned}
&= U^{-1}(-BL + \frac{dL}{dt} + LB)U \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって $L = L(t)$ に対し

$$U^{-1}LU = \text{const} = L(0) \quad (\text{unitary equivalent})$$

だから

$$L(t)U(t) = U(t)L(0)$$

このとき $L(t)$ の固有値を $\lambda(t)$, 固有関数を $\varphi(t)$ とすると,

$$L(0)\varphi(0) = \lambda(0)\varphi(0)$$

これに左から $U(t)$ をかけた式

$$U(t)L(0)\varphi(0) = \lambda(0)U(t)\varphi(0)$$

と上の性質より

$$L(t)U(t)\varphi(0) = \lambda(0)U(t)\varphi(0)$$

これを時刻 t での $L(t)\varphi(t) = \lambda(t)\varphi(t)$ と較べれば

$$\varphi(t) = U(t)\varphi(0)$$

$$\lambda(t) = \lambda(0)$$

が出る。第1式からは $\varphi_t = B\varphi$ が出てくる。

ところで $\mathbf{1}$ を $N \times N$ の単位行列として, $L\varphi = \lambda\varphi$ より,

$$\det(\lambda\mathbf{1} - L) = 0$$

これより

$$\lambda_j^N + c_1\lambda_j^{N-1} + \dots + c_{N-1}\lambda_j + c_N = 0$$

である。ここで $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, N)$ は t によらない値を持つから, これらを c_j についての連立方程式とみて, c_j について解けば,

$$c_j = c_j(\{a_n\}, \{b_n\}) = c_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \text{const}$$

となる。すなわち a_n と b_n の関数である定数 c_j が N 個あり, これが保存量である。ここで a, b は time dependent でも c_j は time independent というわけである。保存量 $c_j (j = 1, 2, \dots, N)$ の関数も保存量であり, これら N 個の保存量は次に述べる N 個の Hénon の保存量と同等であることが示される。

保存量の独立性があらわになるような形で, もう一度, 指数格子の保存量を求めてみよう。

Hénon の保存量

運動方程式は,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Q_n = P_n \\ \frac{d}{dt} P_n = X_{n-1} - X_n \end{cases}$$

ここで, $X_n = C e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}$, C は定数。このとき, 次のような保存量がある。

$$I_m = \sum P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_n} (-X_{j_1}) \cdots (-X_{j_l}) \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

但し, ここで和は, $m = k + 2l$ として, $(i_1, \dots, i_k, j_1, j_1 + 1, \dots, j_l, j_{l+1})$ がすべて異なるものについてとる。この保存量が, 既に Flaschka の方法で, 得られたものと同等であることは証明できる。具体的に, 3個の周期格子では,

$$\begin{aligned} I_1 &= P_1 + P_2 + P_3 \\ I_2 &= P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1 - X_1 - X_2 - X_3 \\ I_3 &= P_1 P_2 P_3 - P_1 X_2 - P_2 X_3 - P_3 X_1 \end{aligned}$$

ここで I_1 は全運動量であり, I_2 はエネルギー積分を表わす。 I_3 には, 対応する簡単な力学的概念は存在しない。特に, ここで $C=0$ とすると, P_n ($n=1, 2, 3$) は保存量となるが, これが I_1, I_2, I_3 が保存量であることと同等であることは明らかであろう。一般に N 個の場合にも同じようにできる。また $C=0$ で考えれば保存量 I_n ($n=1, 2, \dots, N$) が独立であることもわかる。

§ 6.6 シフト演算子

次のような演算子を導入する。

$$\begin{aligned} e^{a \frac{d}{dx}} f(x) &= \left(1 + a \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!} a^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{3!} a^3 \frac{d^3}{dx^3} + \cdots \right) f(x) \\ &= f(x) + a f'(x) + \frac{a^2}{2!} f''(x) + \frac{a^3}{3!} f'''(x) + \cdots \\ &= f(x+a) \end{aligned}$$

例えば,

$$\begin{aligned} e^{\frac{d}{dx}} f(x) &= f(x+1) \\ e^{-\frac{d}{dx}} f(x) &= f(x-1) \end{aligned}$$

これを使うと、指数格子の運動方程式は、

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 r_n}{dt^2} &= a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \\
 &= a(2 - e^{-\frac{\partial}{\partial n}} - e^{+\frac{\partial}{\partial n}}) e^{-br_n} \\
 &= 2a(1 - \cosh \frac{\partial}{\partial n}) e^{-br_n} \\
 &= -a(2 \sinh \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n})^2 e^{-br_n}
 \end{aligned}$$

ここで、 r_n を n の関数とみなしている。波動が十分なめらかなものならば、 n を連続とみなして、(連続体近似)

$$\simeq -a \cdot 2^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \right)^3 + \dots \right)^2 (1 - br_n)$$

最低次では、

$$m \frac{\partial^2 r_n}{\partial t^2} \simeq ab \frac{\partial^2 r_n}{\partial n^2}$$

もっと、高次までとれば高次の波動方程式が得られる。

シフト演算子を用いて、Lax pair を書いてみよう。§ 6.5 より

$$\begin{aligned}
 (L\varphi)_n &= b_n \varphi_n + a_{n-1} \varphi_{n-1} + a_n \varphi_{n+1} \\
 &= (b_n + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n + a_n e^{+\frac{\partial}{\partial n}}) \varphi(n)
 \end{aligned}$$

$$\therefore L = b_n + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n + a_n e^{+\frac{\partial}{\partial n}}$$

$$\begin{aligned}
 (B\varphi)_n &= a_{n-1} \varphi_{n-1} - a_n \varphi_{n+1} \\
 &= (e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n - a_n e^{+\frac{\partial}{\partial n}}) \varphi(n)
 \end{aligned}$$

$$\therefore B = e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n - a_n e^{+\frac{\partial}{\partial n}}$$

実際、この B, L が $\frac{d}{dt} L = [B, L]$ を満たすことを調べよう。

$$\begin{aligned}
 BL &= (e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n - a_n e^{+\frac{\partial}{\partial n}}) (b_n + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n + a_n e^{+\frac{\partial}{\partial n}}) \\
 &= e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n b_n - a_n e^{\frac{\partial}{\partial n}} b_n + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n - a_n^2 + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} a_n^2 e^{\frac{\partial}{\partial n}} - a_n e^{\frac{\partial}{\partial n}} a_n e^{\frac{\partial}{\partial n}}
 \end{aligned}$$

$$LB = b_n e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n} b_n - b_n a_n e^{\frac{\partial}{\partial n}} + e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n} e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n} - e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n^2} e^{\frac{\partial}{\partial n}} + a_n^2 - a_n e^{\frac{\partial}{\partial n} a_n} e^{\frac{\partial}{\partial n}}$$

オペランドとして $\varphi(n)$ を考えると,

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n^2} e^{\frac{\partial}{\partial n}} \varphi(n) \\ &= e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n^2} \varphi(n+1) \\ &= a_{n-1}^2 \varphi(n) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} BL - LB &= e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n} b_n - a_n e^{\frac{\partial}{\partial n} b_n} + b_n a_n e^{\frac{\partial}{\partial n}} - b_n e^{\frac{\partial}{\partial n} a_n} + 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \\ &= e^{-\frac{\partial}{\partial n} a_n} (b_n - b_{n+1}) + a_n (b_n - b_{n+1}) e^{\frac{\partial}{\partial n}} + 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \end{aligned}$$

ここで § 6.5 の運動方程式を使うと,

$$= \frac{d}{dt} b_n + e^{-\frac{\partial}{\partial n}} \frac{da_n}{dt} + \frac{da_n}{dt} e^{\frac{\partial}{\partial n}}$$

これは, $\frac{d}{dt} L$ に他ならない。

§ 6.7 指数格子と KdV 方程式

指数格子も KdV 方程式も, 共にソリトンや, 周期解をもち積分ができる。また逆散乱法も全くパラレルに話をすすめることができる。

これは, 両者に密接な関係があることを, 予想させる。この関係を明らかにする一つの方法は, § 6.6 で示した連続体近似を使うものであろう。しかし, この方法では, 途中で, 積分不可能系を経なければならず, おもしろくない。これをさける, おもしろいやり方がある (→ N. Saito : Journ. Phys. Soc. Japan **49** (1980) 409)。

指数格子を考える (但し, ディメンジョンレス)

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{-r_n} - e^{-r_{n-1}} - e^{-r_{n+1}}$$

相互作用の力を $f_n = e^{-r_n} - 1$ と書くと, 上式は

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(1 + f_n) = f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n$$

ここで, 次のような変数変換を考える。

$$\begin{cases} t = \frac{\tau}{h^3} & 0 < h \leq 1 \\ f_n = h^2 u_n(\tau) \\ \frac{d^2}{d\tau^2} \log(1 + h^2 u_n) = \frac{1}{h^4} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \end{cases}$$

さらに、右へ動く座標系にのって、

$$\begin{cases} x = hn - \left(\frac{1}{h^2} - h^2\right) \tau \\ u(x, \tau) = u_n(\tau) \end{cases}$$

任意の関数 $F(\cdot)$ に対して、

$$\frac{d}{d\tau} F(u_n(\tau)) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\frac{1}{h^2} - h^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right) F(u(x, \tau))$$

よって、運動方程式は、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \left(\frac{1}{h^2} - h^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \log(1 + h^2 u(x, \tau)) \\ &= \frac{1}{h^4} \{ u(x+h, \tau) + u(x-h, \tau) - 2u(x, \tau) \} \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0+$ のとき、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} - h^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial x} + \left(\frac{1}{h^2} - h^2 \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} \cdot \left(h^2 u - \frac{1}{2} h^4 u^2 + \dots \right) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0+} -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} \\ (\text{右辺}) &\rightarrow \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial x} - \frac{1}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\} = 0$$

$u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) とすると

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{KdV方程式}$$

(係数は、スケール変換で変えることができる。)

戸田盛和

従って $0 < h \leq 1$ のとき 指数格子

$h \rightarrow 0+$ のとき KdV 方程式

このときの、ソリトン解の振舞いを調べてみよう。 $f_n(t) = \sinh^2 \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha n - t \sin \alpha)$ から

$$u(x, \tau) = \left(\frac{\sinh \alpha}{h}\right)^2 \operatorname{sech}^2 \left[\alpha \left\{ \frac{x}{h} + \left(\frac{1}{h^2} - h^2\right) \frac{\tau}{h} \right\} \mp \frac{\tau}{h^3} \sinh \alpha + \delta \right]$$

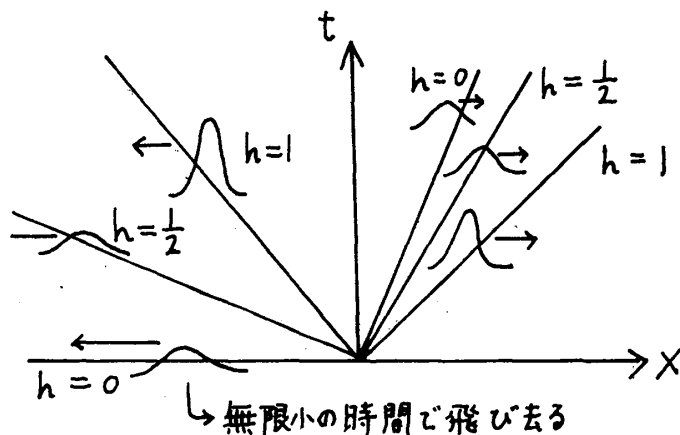
$\alpha = \kappa h$ として、 $h \rightarrow 0+$ とすると

$$u(x, \tau) = \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - c\tau)$$

ソリトンの速度は、 τ の係数より、

$$c = \frac{(1 - h^4) \kappa \mp \sinh(\kappa h)/h}{h^2} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} \kappa^2 & (-) \\ \infty & (+) \end{cases}$$

即ち、 x の負方向へ進むソリトンは、無限大のスピードをもつことがわかる。



文 献

戸田盛和：非線形格子力学（1978 岩波） 非線形格子を主に扱ったもの。この英訳は
 M. Toda : *Theory of Nonlinear Lattices* (1981 Springer-Verlag) 内容はほぼ同じ。
 M. Toda : *Studies of a Non-linear Lattice*, Physics Reports **18C**, No.1 (1975)

KdV 方程式と非線形格子を扱っている。

非線形波動とソリトン（戸田盛和）（数学セミナー（日本評論社）に連載中）はやや広く非線形波動を扱っている。