

## 5. Random Surface の数と String

東大・理 川 合 光

## § 0. はじめに

Random Walk の問題とは空間の中のある種の曲線全体について何らかの量をたし上げる事であった。この問題はスピン系の統計力学と同等であり、定性的な性質はほぼ解明されているといえる。この問題の次元を1つ上げて空間の中のある種の曲面全体についてのたし上げを考えるのが random surface の問題である。この問題はゲージ系の統計力学と同等であり、また紐の量子化、表面張力の模型、重力の量子化などいろいろな物理現象と関係しているため、現代の数理物理学上の大きな問題の1つである。

この問題に対する approach としては次の2つのものが考えられる。

- 1) 連続空間の中で面の functional measure をうまく決める。
- 2) 格子化された空間の中で面を1つずつ数える。

ここでは素朴な2)の立場をとることとする。

## § 1. Random surface の数

格子化された空間の中に contour  $C$  を考え、 $C$  を境界として  $A$  枚の plaquette からなる連結な面の数を  $n(A; C)$  とかく。ここで面としてどのようなものを考えるかによっていろいろな random surface の問題ができるが、以下では主に planar random surface について考える。これは次の式で定義される。

$$\sum_{A=0}^{\infty} \lambda^A n(A; C) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(N, \lambda)} \int [dU] e^{-S} W(C)$$

ここで  $S$  は Weingarten の action であり、

$$S = -\lambda N \sum_{\text{plaquette}} \text{Tr}(UUUU) + N \sum_{\text{link}} \text{Tr}(UU^\dagger)$$

$U_{n, \mu} \in M(N; \mathbf{C})$  は link 上にある Matrix 変数であり、 $W(C)$  は Wilson loop である。

$$W(C) = \frac{1}{N} \text{Tr}(UU \cdots U)$$

幾何学的には、1つの plaquette を多価的にみなしたときの planar な面を考えているわけである。

以下で  $n(A; C)$  のふるまいを調べる。

## § 2. Random walk のまとめ

Random surfaceは面として閉じているという constraint があるので本質的に free ではありません。そのための analogy として interacting random walk を考えるのが適切である。

格子化された空間の中で点  $x$  から点  $y$  まで  $L$  step でつなぐ path の数を  $n(L; x-y)$  とかく。必ずしも path は free ではなく self interaction があってもいいものとする。  $L$  を大きくしたとき次の漸近形が予想される。

$$n(L; x-y) \xrightarrow{L \text{ 大}} L^{-b} \alpha^L F((x-y)^2, L)$$

ここで  $F$  は  $x-y$  を固定して  $L \rightarrow \infty$  のとき  $\rightarrow \text{const}$  となるような函数である。さらに  $F$  には次の漸近的な scaling 則が予想される。

$$F = f\left(\frac{(x-y)^2}{L^{d_H}}\right) \quad (L \text{ 大のとき})$$

ここで  $d_H$  をこの random walk の Hausdorff 次元とよぶ。

次の Green 函数をつくると

$$G(x-y; K) = \sum_{L=0}^{\infty} K^L n(L; x-y)$$

$K\alpha = 1$  が critical point であり、それからのずれを

$$K\alpha = 1 - (ma)^{d_H} \text{ とおくと,}$$

$$G(x-y; K) = \left(\frac{1}{ma}\right)^{d_H(1-b)} \cdot g(m^2(x-y)^2)$$

$$\text{担し } g(x) \equiv \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{-b} f\left(\frac{x}{t^{d_H}}\right)$$

とかけ、critical exponent の関係も正しく出る。

## § 3. Random surface の数に対する conjecture

前節との analogy から次の conjecture が成り立つ。

$$n(A; C) \xrightarrow{A \text{ 大}} A^{-b} \alpha^A F(A; C)$$

ここで  $F(A; C)$  は  $C$  を固定して  $A \rightarrow \infty$  のとき  $\rightarrow \text{const}$  となるような函数であり、さらに次の漸近的な scaling 則が予想される。

$$F(A; C) = f\left(\frac{S}{A^{d_H}}\right) \quad (A \text{ 大のとき})$$

ここで  $S$  は  $C$  を境界とする minimal surface の面積であり,  $d_H$  はこの random surface の Hausdorff 次元である。

次の Green 関数をつくると,

$$G(C; K) = \sum_{A=0}^{\infty} K^A n(A; C)$$

これは量子化された南部 action の格子における regularization になっている。

$$G(C) = \int_{\text{boundary } C} \mathcal{D}X_\mu(\sigma, \tau) e^{-\rho_0 \int d\sigma d\tau \sqrt{\left\{ \frac{\partial(X_\mu, X_\nu)}{\partial(\sigma, \tau)} \right\}^2}}$$

ここで  $e^{-\rho_0 a^2}$  が  $K$  に対応する。

もし,  $n(A; C) < \alpha^A$  の形で bound されず  $A!$  程度になってしまうと path integral において entropy の方が dominate して和は発散してしまい, 連続極限がとれない。

#### § 4. いろいろな Random surface に対する bound

ここでは次の 3 種の Random surface について  $n(A; C)$  の bound を与える。(証明略)

- ① 面を多価的に数え, しかも planar に限らないとき。

これは次の式で定義される。

$$\sum_{A=0}^{\infty} \lambda^A n_{\text{all}}(A; C) = \frac{1}{Z} \int e^{-S} W(C) [dU]$$

ここで  $U_{n, \mu} \in C$  は link 上の変数であり,

$$S = -\lambda \sum_P UUUU + \sum_{n, \mu} U_{n, \mu} U_{n, \mu}^*$$

$W(C) = UU \cdots U$  は Wilson loop である。

このとき  $n_{\text{all}}(A; C) \xrightarrow{A \text{ 大}} A^A$  のひどい発散であり, 連続極限は存在しない。

- ② self-avoiding random surface

自分自身を 2 度と切らないような surface 全体を考える。このとき次の bound が成立つ。

$$n_{\text{self-avoiding}}(A; C) < \{2(d-1)\}^A$$

- ③ planar random surface

定義は § 1. で与えたように, 自分自身と交差してもよいが Euler index 最大のものをとる。

このとき次の bound が成り立つ。

$$n_{\text{planar}}(A; C) < \{48(d-1)\}^A$$

§ 5. 終りに — large- $N$  ゲージ系への手がかかり —

最近, 次の事実が見つかった。<sup>2)</sup>  $U(N)$  ゲージ symmetry をもつ系は large- $N$  の極限で変数の数が著しく reduce した model と同等である。

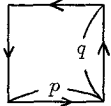
$U(N)$  - LGT

$$\begin{array}{l} \leftrightarrow \\ \text{同等} \end{array} S = \frac{N}{g^2 N} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} (U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger) \quad U_\mu \in U(N) \quad (\mu = 1, 2, \dots, d)$$

Weingarten

$$\begin{array}{l} \leftrightarrow \\ \text{同等} \end{array} S = N\lambda \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} (A_\mu A_\nu A_\mu^\dagger A_\nu^\dagger) - N \sum_{\mu} \text{Tr} (A_\mu A_\mu^\dagger) \\ A_\mu \in M(N; \mathbf{C}) \quad (\mu = 1, 2, \dots, d)$$

すなわち, もともと lattice site の数を  $V$  として  $Vd$  個の Matrix があつた model が  $d$  個だけの Matrix の model と同等なのである。ここで同等といっているのは本来の理論の Wilson loop と reduced model の Wilson loop が一致するという意味である。例えば,

$$\langle W \left( \begin{array}{c} \text{Wilson loop diagram} \end{array} \right) \rangle_{\text{本来の理論}} = \langle \text{Tr} (U_1^p U_2^q U_1^{+p} U_2^{+q}) \rangle_{\text{reduced model}}$$


などである。また本来の理論の単位体積あたりの free energy は reduced model の free energy と一致する。

これは  $d$  個の matrix からなる matrix model の large- $N$  極限なのでうまくいけばとけるかもしれない。

参 考 文 献

- 1) T. Eguchi and H. Kawai, UT-365 (1981). Number of Random Surfaces on the Lattice and the Large- $N$  Gauge Theory.
- 2) T. Eguchi and H. Kawai, UT-378 (1982). Reduction of Dynamical Degrees of Freedom in the Large- $N$  Gauge Theory.