プラズマにおけるソリトン

名大 プラズマ研究所
市川芳彦

1. ソリトン物理学の課題

自然界に生ずる各種の波動現象は，多数の自由度を持つ体系の物理的ふるまいを研究するための規範を提供する。即ち，如何に複雑多様な運動でも，適当なノーマル・モードの重ね合わせとして理解することができるという考え方が，物理学において基本的なものであった。プラズマの場合，"プラズモン"として知られている集団運動のモードを導入することにより，その特徴的なふるまいが把握されるという事は，良く知られている。それ故，例えばプラズマ内の充分に乱れた乱流状態をこの集団運動のモードと，粒子の個別運動の間の相互作用，或いは集団運動のモード間の相互作用の効果を摂動論的に考慮することによって理解しようとする試みがくりかえされてきたのは，当然のことである。

然し，自然界に生ずる波動現象には，本質的に非線形である運動形態，即ち，"ソリトン"とよばれるモードが存在することが，明らかにされ，"ソリトン"の物理学的問題が深く研究されるようになってきた。プラズマは，極めて多様な波動を伝えることができ，その

波動の振幅は，非線形性が重要となるレベルに極めて容易に到達するため，ソリトンの伝播，ソリトンと他の自由度との相互作用の特性などを研究する対象として，非常に有用である。

ソリトン物理学の当面の課題としては，紐，渦糸，渦，等の非線形多次元的運動のモードに対して，有効な数学的手法を確立することが，特に重要な問題の一つとして考えられるが，プラズマにおける非線形ドリフト波の渦モードのふるまいは，注目に値する現象である。

2．逓減摂動論の方法

波動の非線形効果は，波面の突立ちをひきおこすが，自然界においては，この効果は散逸効果，或いは波の分散効果と競合して相殺し，定常的な状態の存在を許す場合が多い。谷内等によって定式化された逓減摂動論は，摂動の各オーダーで，非線形効果による突立ちと，分散効果による拡がりのバランスを保ちながら解析を進めるという方法である。プラズマにおけるイオン音波に対する例を示すと，方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t}n+\frac{\partial}{\partial x}(nu)=0 \qquad 1\text{-a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u+u\frac{\partial}{\partial x}u=-\frac{\partial}{\partial x}\psi \qquad 1\text{-b)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi=e^{\psi}-n \qquad 1\text{-c)}$$

に対して，変数 x，t を

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-t)\ ,\quad \tau=\varepsilon^{3/2}t \qquad 2)$$

と変換することにより，順次に

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^{(1)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\psi^{(1)}+\psi^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\psi^{(1)}=0 \qquad \text{3-a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\psi^{(2)}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\psi^{(1)}\psi^{(2)}\right)=C^{(2)}\frac{\partial}{\partial\xi}\psi^{(1)}-\frac{3}{8}\frac{\partial^5}{\partial\xi^5}\psi^{(1)}+\frac{1}{2}\psi^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\psi^{(1)}-\frac{5}{8}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\psi^{(1)}\right)^2 \qquad \text{3-b)}$$

という系列の方程式に分解できる。[1] 3-a) は Korteweg-de Vries 方程式であり，3-b)の右辺第一項は，ソリトンのくりこみ項以下高次の分散効果及びソリトン同志の相互作用，或いはソリトン自身の変形の効果に起因する2次のオーダーのポテンシャルへの寄与をあたえる。特に，注目すべき点は，3-b)は，2次のポテンシャルに対する線形な方程式となっている事である。

非線形偏微分方程式の系，1.a)～1.c)について，逓減摂動法は，それを3.a)，3.b)…と分解し，非線形項は，3-a)の左辺第3項にのみあらわれている形になっている。逓減摂動法の高次項は，最低次において形成されたソリトンに対するくりこみの効果，[2] 即ち着物を着たソリトンの形成と，ソリトン同志の相互作用の効果を記述する。本質的に非線形な効果を最低次にすべてとりこんでしまった形になっているところが，逓減摂動論の特に重要な特徴であり，あたえられた系のふるまいを，ソリトン系の性質に基づいて解析する方法の有効性を露わに示している。

3. 逆散乱法の一般化

Korteweg-de Vries方程式3-a)の孤立波解を用いた数値解析によって、二個の孤立波の衝突によっても、それぞれの孤立波の個性が失われないことを発見したZabuskyとKruskalは、"ソリトン"という呼称を提唱したが、Grdner-Greene-Kruskal-Miuraによる逆散乱法の発見により、非線形ノーマル・モードとしてのソリトンの数学的基礎が確立した。Korteweg-de Vries方程式に対する逆散乱法の発見は、将に奇蹟的なものであったが、非線形シュレーディンガー方程式に対するZakharovとShabat、及びmodified K-dV方程式に対する和達による逆散乱法の適用は、この逆散乱法の枠組みが、かなり一般的なものであることを示唆した。事実Ablowitz-Kaup-Newell-Segurは、上に述べた方程式の他sine-Gordon方程式等をも包括的に含む逆散乱法の枠組みを構成し、この方法で解く事のできる非線形発展方程式を体系化することに成功した。2行2列のマトリックスに対する固有値問題として定式化されたA-K-N-Sの枠組みに対して、3行3列のマトリックス、或いは、一般にn行n列のマトリックスの固有値問題を考察してみようという一般化が試みられるのは、当然といえよう。

然しながら、2行2列のマトリックスの固有値問題を考える範囲でも、A-K-N-Sの枠組みとは異なる新しい

逆散乱法の枠組みが存在することが明らかにされている。プラズマ内を伝播する円偏光アルヘン波の非線形伝播について，逓減摂動論に基づいて，微分形非線形シュレーディンガー方程式が導出されているが，これに対する新しい逆散乱の枠組みが，Kaup と Newell[3]によって発見された。これより先に，我々はこの微分形非線形シュレーディンガー方程式の定常的孤立波解を求めていたが，これは無限遠で有限振幅の平面波となる境界条件に対する解であり，無限遠で 0 となるという Kaup-Newell の逆散乱法に対する境界条件とは異なる。無限遠で有限振幅の平面波となる円偏光アルヘン波の非線形伝播を記述する方程式は，良く知られた3乗の非線形項を持つ非線形シュレーディンガー方程式と，その微分形の非線形項を持つ微分形非線形シュレーディンガー方程式の重ね合わせの構造を持っている。この形の方程式に対して，我々は，A-K-N-S の枠組みと K-N の枠組みを重ね合わせた形式えの逆散乱法の一般化が可能であることを示した。[4] この成功に勇気づけられて，我々は，新しい逆散乱法の枠組み，いわゆる W-K-I の枠組みを構成することに成功し，幾つかの新しい積分可能な非線形方程式を発見した。[5] 具体的にそれらの方程式の代表的なものを書きおろすと

$$i q_t + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{q}{\sqrt{1 \pm |q|^2}}\right) = 0 , \qquad 4)$$

$$q_t + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{q_x}{(1 \pm q^2)^{3/2}}\right) = 0 \qquad 5)$$

等の方程式である。逆散乱法に基づいて、これらの方程式の1個のソリトン解が求められているが、複数のソリトンの存在する解の研究などはまだ着手されていない。大きく変形し得るロープの上を伝播するループ・ソリトンなど物理的にも興味深い新しい種類のソリトンが求められたことは、注目に値する。[6)]

4. ソリトンとしての2次元渦運動

以上に述べたように、非線形方程式に対する逆散乱の方法は、当初の予想をはるかに越えた大きな発展を遂げたが、然し、それらの適用が空間的には一次元の変化を記述する方程式に限定されているという制約を乗越えることができないまゝであるのが現状である。この制約を乗越える端緒をあたえると考えられる話題について簡単にふれておこう。

外部磁場内のプラズマについて、その密度勾配のある領域内を、磁場に垂直に伝播するドリフト波はプラズマの閉じ込め、及び輸送現象に対して、極めて重要な役割を果す波動モードであるが、その非線形的ふるまいについて、Hasegawa と Mima は、その静電ポテンシャル $\phi(x, y : t)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\phi - \phi) + v^*\frac{\partial}{\partial x}\phi - \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\phi\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\phi = 0 \qquad 6)$$

という二次元的非線形方程式によって記述されることを示した。[7] プラズマの分野ではHasegawa-Mima方程式とよばれるこの方程式は，大気物理学の分野では，地球の自転の影響を受けながら伝播するRossby波に対する方程式に他ならない。この同じ方程式は，海洋物理学においても話題となっているという意味で，かなり一般的な方程式である。

最近，ソ連邦の海洋物理学者LarichevとReznik[8]は，この方程式の厳密解として，一個の孤立した定常渦の表式を求めることに成功した。牧野，上村，谷内はこの2次元渦運動のダイナミックスを詳しく分析し，特にこれらの定常解としてあたえられる渦同士の衝突過程において，それぞれが個性を保存することを発見した。[9] これは，丁度に，K-dV方程式の孤立波解に関するZabuskyとKruskalによる数値実験に基づくソリトンの発見に対応する2次元的ソリトンの発見といえよう。従って，丁度Gardner-Greene-Kruskal-MiuraがK-dV方程式に対する逆散乱法を発見した努力に対応して，今やHasegawa-Mima方程式に対する2次元的逆散乱法の開発に努力するべき段階に到達しているといえよう。

5. まとめ

1960年代後半に始まるソリトンに関する研究の発展を，プラズマ物理学の分野を中心に概観した。プラズマは，多種多様な波動を伝播する特徴的な

媒質であり、その波動の振幅は容易に非線形効果が重要となるレベルに到達する。それ故、プラズマを閉じ込め、プラズマを加熱し、熱核融合反応を生じようという研究を進めるためにも、ソリトンという非線形ノーマル・モードの励起が、プラズマの総体的ふるまいにどのように関与しているか？を明らかにすることが必要である。即ち、物性におけるソリトンという視点からの研究を推進しなければならない。

1). K. Konno et al ; J. Phys. Soc. Japan 46 (1979) 1907～

2) Y. Kodama et al ; J. Phys. Soc. Japan 45 (1978) 269～

3) D. J. Kaup et al ; J. Math. Phys. 19 (1978) 798～

4) M. Wadati et al : J. Phys. Soc. Japan 46 (1979) 1965～

5) M. Wadati et al : J. Phys. Soc. Japan 47 (1979) 1698～

6) K. Konno et al : J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 1025～

7) A. Hasegawa et al : Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 205～

8) V. D. Larichev et al : Polymode News 19 (1976) 3～

9) M. Makino et al : J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 980～