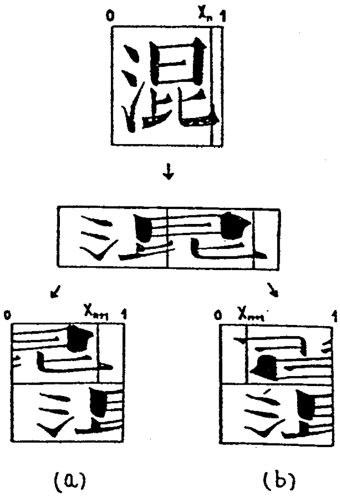
非線型動力学の新しい展開

京大・基研　蔵　本　由　紀

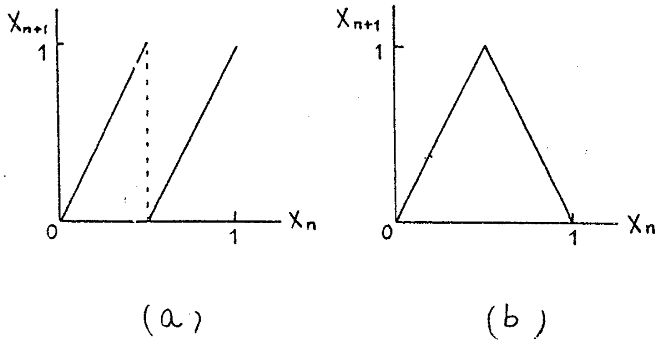
非線型効果が動的な過程において本質的な役割を演じるようになりますと，予想もしなかった見事なコヒーレンスが生れることは，最近の物理の発展の中でしばしば経験されるところです。ソリトンをめぐる諸現象，また非平衡定常系における秩序形成などにその典型を見ることができます。しかし，一方では非線型性は，我々が当然規則性ないし秩序の存在を期待して良いようなケースにおいて，いともかんたんにこれを破壊してしまうという側面をもっています。まことに非線型過程は，なお我々の理解の射程からはほど遠く，むしろ我々を翻弄し続けている現象と言うべきでしょう。ここでお話ししたい通称「カオス」なる現象は，非線型性の後者の側面に関するもので，物理の側から見てこれがどのようないきさつを経て我々の関心を惹くように至ったか，これをかなり主観をまじえながら述べてみようと思います。

偶然的に継起する事象の連鎖は，自然界のあらゆる局面で我々が遭遇する現象です。それは古くから確率過程として数学的に模型化され，広範な理論的考察の対象となってきました。しかし，見かけ上の偶然性の背後に必然的な支配法則が働いているという考えに対して，今日では誰も異議を唱えないでしょうし，とりわけ古典的な物理法則が支配するマクロな水準での偶然事象は，原理的には決定論的に説明可能なものと人は信じて疑わないと思います。以下の話の中に出てくる「不安定力学系」という概念に照らせば，この主張さえも一定の留保を必要とするのではないかと思いますが，それはともかくとして，背後の力学過程に立入らないで現象論的に事象の生起確率なるものを導入したことは，きわめて賢明で実際的でした。例えば，多数回の銅貨投げ試行を例にとると，表及び裏の出る確率が各回独立で½，½であるという確率過程として記述することが，通常の目的にとっては最も利口で，もしも試行結果を左右する諸要因に立入って，因果的な記述を企てれば，忽ち気の遠くなるような複雑さに出会うことは必定です。むしろこの場合，そして他の多の場合にも，決定要因の複雑多様さこそ，単純な確率過程として記述することの正当さを保証しているものと考えられます。ところが，我々はこうした考えに慣れ親しんでいるうちに，自然観におけるひとつの偏見を育んできたのではないか，という気もするのです。すなわち，過程がランダムであることの原因を，結果を左右する要因の多様さに，何となく求めてしまうこと，更に進んで，「不規則な結果をもたらす決定論的力学系は多数の自由度をもたなければならない」という誤った観念です。非線型動力学の新しい波は，この事の根本的な反省を迫ります。

ランダムな過程に対する上述の通念は，次の例によって誤りであることが容易に判ります。これはエルゴート理論などでもよく引合いに出され，又コンピューターにおける乱数発生の原理とも関係があるので，御存じの方も多いと思いますが，パイこね変換（baker's transformation）と呼ばれる“力学系”です。第１図(a)のように，二段操作で一辺１の正方形をそれ自身に写す変換 $f:(X_n, Y_n)\to(X_{n+1}, Y_{n+1})$です。最初の段階では，水平方向に一様に２倍に伸ばし，垂直方向に一様に½に縮めます。次にそれを２つに切断し，(a)では右半分をそのまゝ左半分の上に重ねます。(b)のように，ひっくり返してから重ねる変換



第1図



第2図

もしばしば考察されます。簡単の為，X座標の変換$X_{n+1}=f(X_n)$だけに着目すると，第1図の(a),(b)に対応して，それぞれ第2図の(a),(b)に示したような，区分的に線型な写像fが得られることは明らかです。ところが，(a),(b)いずれの変換でも良いのですが，これを多数回繰り返すことによって得られる数列X_1，X_2，X_3，… はきわめて不規則です。例えば，初期値X_1に少しでも不確定性があれば，充分に遠い先に現われるX_nの値は全く予測不可能となります。また，$X=\frac{1}{2}$を境にして，右か左かだけで状態わけをし，右なら＋，左ならーを対応させますと，上の数列に対応して，＋－＋＋－……のような符号列が得られますが，これは理想化された銅貨投げ試行列と全く見分けがつきません。特に，どんなにでたらめに我々が作った符号列でも，それを変換fによって正確に再現するような初期値X_1が必ず存在すること，また生成された符号列のどんなに長い部分に関する知識をもっていても，その次のステップに現われる符号については何も予測することができない，等の性質があります。このように，全くランダムな過程が，僅か1自由度の“力学法則”から生じる，という事がわかりました。決定論的法則から生じるランダムな現象をひっくるめて，以下ではカオスと呼ぶことにします。先の結果が予測できないということは，決定論的過程においては，系の振舞いが初期条件にひどく敏感である，ということを意味します。それはまた，「“軌道”の不安定性」と言っても良いでしょう。我々の例では，誤差ΔXが変換ごとに倍増してゆくことが容易に判ります。一般にカオスは，こうした指数関数的な軌道不安定性によって特徴づけることができます。不安定な平衡状態とか，不安定な周期運動といった場合ですと，少しの攪乱によっても，系は別の，もっと安定な運動形態に移行するのですが，カオスの場合には全く事情が違っていて，軌道不安定だからといって，そこから逃げ出すわけにはいかないのです。不安定なまゝ永久運動をする他ないのです。たしかに，初期において接近した2つの軌道は，急速に離反してゆきますが，非線型性によって何度でも回帰します。自己離反的で，且つ自ら有限領域に閉じこもっています。カオスには何かしらこのように，不安定にして安定，決定論的にしてランダム，といったアンビバレンスがあります。

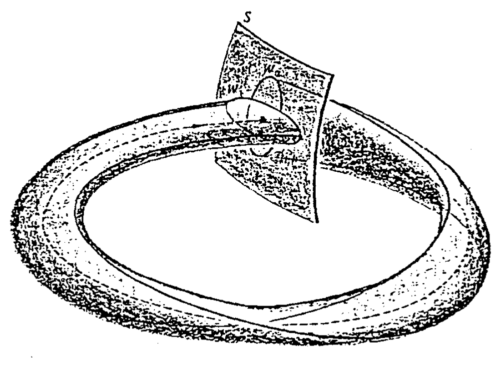
さて，上のような例は離散的な過程なので，力学系といってももうひとつ実感が湧かないという向きもありましょう。しかし，離散力学系は連続力学系と実は密接な関係にあり，後者に対して離散的な観測を

行った結果として得られるのが前者だ，という見方も成立ちます。このような着想は，H. Poincaréに始まります。いま，一組の常微分方程式によって連続力学系が与えられているとします。保存系でも散逸系でもよろしい。相空間の中の流れを，ある断面（Poincaré 断面）において捉えることを考えます（第3図参照）。例えば，3次元空間において，位相点が単純な閉曲線を描くなら，適当な断面Sの切り口には一点（X^*, Y^*）が現われます。 初期に閉曲線上に乗っていない一般的な位相点が描く軌道は，S上では$(X_1, Y_1) \to (X_2, Y_2) \to \cdots$のように観測され，ひとつの変換 $F:(X_n, Y_n) \to (X_{n+1}, Y_{n+1})$によってこの動きを追うことができます。具体的には，これは2元1階差分方程式

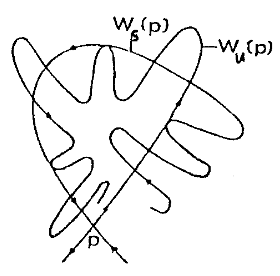
$$X_{n+1} = f(X_n, Y_n), \quad Y_{n+1} = g(X_n, Y_n) \tag{1}$$

です。元の微分方程式を考える代りに，しばしばこのような離散力学系が考察の対象になります。単純な周期運動はFの不動点であり，その安定性は，(1)を（X^*, Y^*）のまわりで線型化して得られる系の固有値から知られます。Poincaré はこうした描像に基いて，非常に複雑な運動（カオス）が連続力学系においても可能であることをすでに予測していました。簡単のため，引続き2次元写像の言葉で説明しますが，いま不動点 $p(X^*, Y^*)$ が不安定化して鞍点になったとします。(1)を線型化すると，2つの固有軸が定義されます。これらの軸の一方に沿っては，nとともに指数関数的に不動点から遠ざかり，他方に沿っては，指数関数的に接近します。このような固有軸は，非線型領域にまで延長できて，それぞれ不安定多様体W_u，安定多様体W_sと呼ばれる集合を作ります（第4図参照）。W_u（W_s）上の点は，変換Fによって常にW_u（W_s）上にとどまるという不変集合です。 Poincaré はW_uとW_sが文叉する可能性を指摘しました。 これはもちろん，軌道の一意性の要請とは何ら矛盾しません。

交点をホモクリニック点と呼びます。W_uとW_sの定義からして，ホモクリニック点は変換Fを施してもやはりホモクリニック点です。換言すれば，ホモクリニック点がひとつ存在すれば，同時に無限個のホモクリニック点が存在します。また，ホモクリニック点は鞍点の無限に近くから発して，その無限に近くに回帰する点です。このような点が出現すると，系は非常に複雑な振舞いをするようになる，とPoincaréは予想しました。 直観的にも予想されることは，もしこのような点が存在すれば，初期条件を鞍点近くに適当にとれば，有限時間内に完全に回帰する軌道，即ち周期軌道を作ることができるということです。その周期がどんなに長くても良いのだったら，このような周期軌道はいくらでも沢山存在するでしょう。カオスは軌道の不安定性によって特徴づけられる，と前に申しましたが，他方では長周期軌道のこのような“豊富さ”によるカオスの特徴づけも可能です。なお，Poincaréは制限3体問題に対する関心



第3図



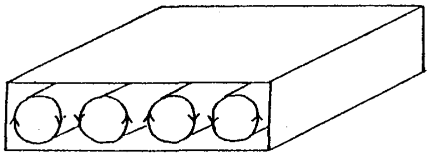
第4図

からこうした考えに至りましたが，保存力学系に限らず，散逸力学系においても，ホモクリニック点の存在とカオスに関する上のような考えは，全く妥当するものです。

このような昔からカオスの可能性は予想されていたのに，ごく最近まで物理現象との関連では真面目に考えられた事がなかったのは不思議な気もします。これには，コンピューターの発達ということもあるでしょうが，とにかく，自然界における運動形態は，要素に還元すれば規則正しい振動運動であって，ただ余りにも多数の要素が共存している為に複雑に見えるのだ，という風に漠然と信じられていた感があります。例えば乱流現象です。乱流は自然における乱れた運動の代表的なものと申せますが，L. D. Landau さえ（そして，数学者 E. Hopf もそうですが）それを準周期運動として理解しようとしました。つまり彼等によると，レイノルズ数の増加とともに流体運動が逐次不安定化を起し，そのたび毎に新しい周期をもった振動成分があらわれ，このようにして高レイノルズ数では非常に沢山の，互に有理化でない振動数から成る多重周期運動となり，これが即ち乱流というものである，という解釈です。70年代に入って，にわかにカオスが我々の関心を惹くきっかけとなった重要な物理的問題は，流体乱流の発生機構に関するものです。もうひとつの源泉は，数理生態学ですが，これは後でふれます。まず，1963年に現われた E. N. Lorenz の論文に言及しない訳にはゆきません。Lorenz は気象学者ですが，その為もあってか，我々がその先駆的仕事を知るに至ったのは，やっと70年をかなり過ぎて，それも P. C. Martin らがとりあげてからのことです。Lorenz がやったことは一言で言えば，3元連立微分方程式

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= \sigma (Y-X), \\
\dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\
\dot{Z} &= XY - bZ, \\
&\sigma, r, b > 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

の解を数値的に追跡し，それが不規則運動であることを見出したということです。これは単純素朴に見えますが，実に大した発見だと思います。上の方程式は，ベナール対流としてよく知られている流体現象の最も単純なモデルになっています。これは第5図のように，平行平板間の液体を下から暖め，両面間に一定の温度差 ΔT を定常に保った系に生じる現象です。ΔT が小さい場合には，浮力が粘性に打ち勝てないので，流体は静止したまゝで，熱はただ伝導によって上方に運ばれます。しかし，ΔT が臨界値を越えると対流が発生し，互に逆向きの渦が交互に規則正しく水平面上に配列します。ΔT が更に大きくなりますと，場合によっていろいろな可能性がありますが，結局は乱流状態になります。この現象を記述する流体方程式系に対して，最も本質的と思われる3モードだけを考慮して得られた模型がローレンツ模型(2)です。もちろん，実験的検証に耐えられるような模型ではありませんが，それは Lorenz もよくよく承知の上でしょう。大気現象において長期予測が非常に難しいのは，よく知られた経験事実ですが，その本質は決定論的力学系に生じるランダム運動に他ならない，というのが Lorenz の主張です。(2)のような簡単な系でさえそうではないか，いわんや……という主張ですから，模型が現実的でないという批判は，

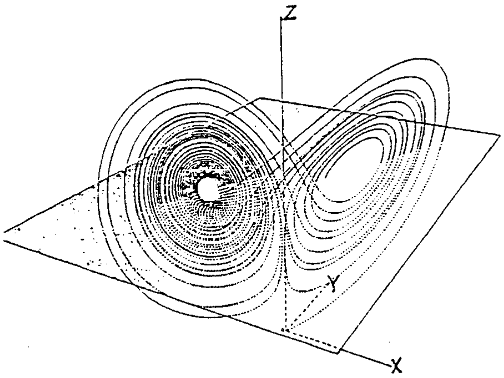


第5図

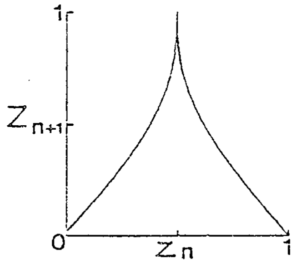
Lorenzにとってはどうでも良いことです。 それと，あらわに述べてはいないけれども，彼の仕事は乱流の本質について，Landau-Hopf の描像とは違う新しい見方を提出している事になります。(2)からすぐに判ることは，

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X}+\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y}+\frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z}=-(\sigma+b+1)<0 \tag{3}$$

という性質によって，相空間の体積要素が一定の割合で縮んでゆくことです。位相体積が減少し，$t\to\infty$ でゼロになるということは，散逸力学系に共通する特徴ですが，これは必ずしも一点に収縮することではなくて，例えば閉軌道に吸引されてもよいし，もっと複雑なアトラクタを形造ってもよろしい。但し，このアトラクタのルベーグ測度はゼロです。ローレンツ系では実際にこれが起ります。rはレイリー数に対応していますが，$r<1$では原点(0, 0, 0)が安定な不動点です。これは対流の無い状態に対応しています。$r>1$になると，この定常状態は不安定化し，一対の安定定常態$(\pm\sqrt{b(r-1)},\ \pm\sqrt{b(r-1)},\ r-1)$がここから分岐します。これらは定常な対流状態に対応していて，解が対として現われるのは，すべての渦を逆転させたものも，対称性によって解となるからです。$\sigma=10$, $b=8/3$とすると，$r>24.74$では対流状態も不安定化し，直ちにカオスが現われます(第6図(a)参照)。 系は不安定化した一対の定常点の周りを回りつゝ，不定期的に両者の間を往復しているような運動を示しますが，これは渦の振動と，不定期的に起る反転に対応しています。このようなカオティクな軌道の全体はストレンジ・アトラクタと呼ばれています。Lorenzの優れた点は，このアトラクタの解析法にもあります。 アトラクタはほぼ厚みの無い，幾何学的に奇妙な形のシートに乗っています。ですから，Poincaréにならって，離散的な観測，例えばZの値が局所的に最大となるたび毎に，その値Z_1, Z_2, ……を観測すると，Z_{n+1}は殆んど一義的にZ_nによって決まることになります。尤も，軌道の一意性から，アトラクタの厚みが完全にゼロになることはできません(後述)。とも角，近似的にはこのようにして，一次元写像$Z_{n+1}\fallingdotseq f(Z_n)$が得られ，これはテントのような形になります(第6図(b))。頂点が滑らかでないのは，特異点(0,0,0)の存在によって流域が分けられるからです。Lorenzは，この写像と図2(b)との類似性に着目しました。多少の相違はありますが，明らかにローレンツ系の不規則性は，パイこね変換における不規則性と同じ根をもっています。



(a)



(b)

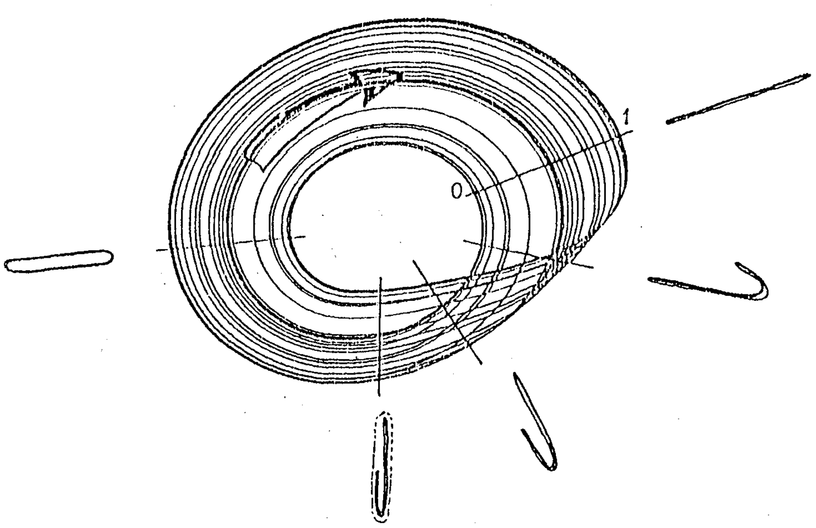
第6図 (a) Lorenzアトラクタ(D. Ruelle, La Recherche **11** (1980) 132による)。
(b) 対応する近似的一次元写像。

Lorenzの論文とならんで，RuelleとTakensによる論文も物理屋に大きな影響を与えました。と言っても，彼等の論文は非常に数学的でしたので，悲しいことに数学的素養に欠ける私どものような平均的物理屋としては，皆目理解できないままに，ただ右往左往するばかりでした。Lorenzの仕事は(直接それとは言っていないものの)，Landau-Hopfの描像に対する重大なcounter-exampleを提供したものと言えますが，Ruelle-Takensの場合はずっと直接的に，Landau-Hopf機構そのものが，一般には不可能であることを証明しました。Landau-Hopfにおいては，任意の多重度をもつ概周期運動が可能であることを仮定していますが，Ruelle-Takensによると，3重周期運動(最初の論文では4重周期運動だった)以上は一般に不可能である，という意味は，仮に$n(\geq 3)$重周期運動を示す力学系があるとして(この例はいくらでも作れます。例えば，3個の独立な振動子全体をひとつの系と見ることによって)，この力学系に微小な摂動を加えると，非常に特殊な摂動でない限り，概周期運動がこわれ，ストレンジ・アトラクタ(この場合はSmaleによる本来の意味)が出現する，という主張です。この主張は，必ずしも リミトサイクル→2重周期運動→カオス，なる道筋が現実的な道筋のひとつであることを主張するものではありませんが，それにも拘らず，その後の流体実験によると(具体的には，回転する同軸円筒間の流体に関するSwinney Gollub 達の実験)，少くとも現象的には上と類似の道筋が見られます。理論的にも，八幡英雄氏による精力的な解析があり，本質の解明が期待されています。

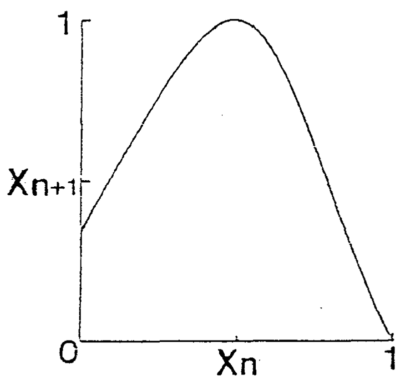
70年代も半ばを過ぎると，カオスに関する論文が次第に物理関係誌上を賑わすようになります。その中で，O. E. Rösslerという理論化学者の役割は(人によって評価がずい分違がうようですが)注目に値します。というのは，我々がRuelle-Takensをはじめとする数学的な論文に恐れをなして，カオスのようなとてつもなく難しい問題は，到底我々のような凡人の及ぶところではない，と半ば諦め気味になっていた矢先，一連の直観的な(じかしまたずい分荒っぽい)仕事を通じてカオスを一躍“大家化”するのに力のあった人だからです。彼はローレンツモデルのモデルを作りました。モデルのモデルといいますと，普通は余りほめられないことになっていますが，この場合は少し違います。具体的には

$$
\begin{aligned}
&\dot{X} = -Y - Z,\\
&\dot{Y} = X + eY,\\
&\dot{Z} = f + (X - \mu)Z,\\
&\quad e, f, \mu > 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

で表わされます。この系のストレンジ・アトラクタは第7図に見るように，ローレンツ系と違って，目玉はひとつです。そのまわりを，系は振動成長します，しかし，振幅がある閾値(はっきり定義されないが)を越すと急にフィードバックが効いて，不動点附近に押し戻され，再び振動成長をはじめる，というプロセスを繰り返しているような系です。そして，どの位相でフィードバックがかかるかのタイミングが，履歴の少しの違いによって大きく異ってくる為に不規則性が生じます。このストレンジ・アトラクタはLorenzの場合と同様に，ほぼ一枚のシートを作っています。それはメビウスの帯に一見似た形ですが，異なる点は，メビウスの帯では，一周すると帯が完全に裏返されるのに対して，今の場合には，帯の一部のみ裏返され，残りは裏返されないので，必然的に折りたたまれることになります。流れに沿ってゆくと，



(a)



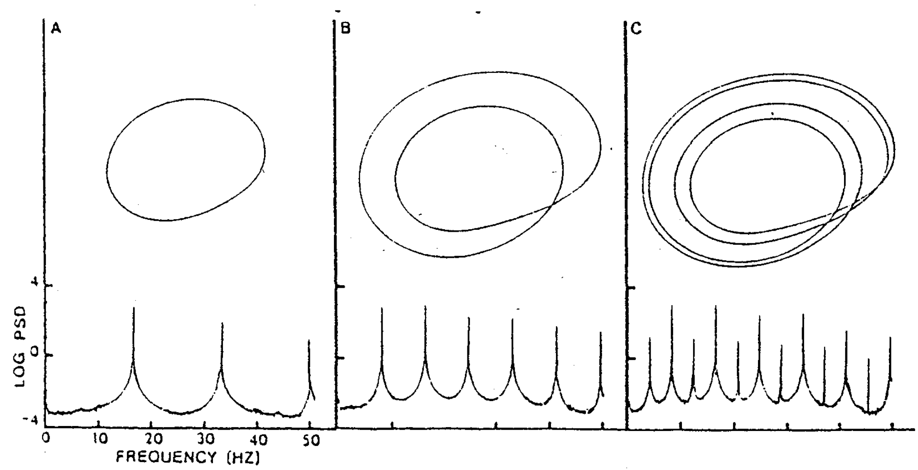
(b)

第7図　(a) Rösslerアトラクタ及び各Poincaré断面で見たアトラクタの切り口。
(b) 対応する近似的一次元写像。

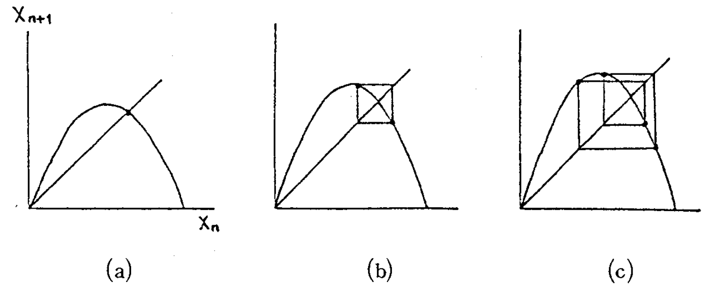
折りたたまれてほぼ一枚になったものが再び折りたたまれ，殆んどぴったりと一枚になる。又折りたたまれる，という風になっていて，薄っぺらなアトラクタは，実は無限枚のものから成っている，ということがわかります。これはRösslerのモデルに限ることではなくて，Lorenzの場合もそうですし，一般にストレンジ・アトラクタに共通の性質です。しかし，アトラクタの微細構造にはひとまず目をつぶって，再びPoincaréにならって，適当な横断面をとりますと，切り口はほぼ一本の線になります。そこで，この線上に適当に座標Xを導入して，近似的な一次元写像が得られます。大体予想がつくように，これは滑らかなひと山写像です。ローレンツ系のようなカスプをもったひと山写像や，パイこね変換のように，区分的に線型の写像も仲々に面白いのですが，滑らかなひと山写像は，現実の系において最も頻繁に現われるタイプとして，とりわけ重要なものです。加うるに，この写像の面白い点は，パラメタの変化とともに，周期軌道からカオスに至る過程を調べると，ローレンツ系と違って，2次相転移的にカオスが発生すること，そして通常の相転移における揺らぎの増大に類似して，本当のカオスが現われる前に，そのきざしが大変美しい規則性をもつて現われる，ということです。これを系(4)で見ますと，第8図のように，単純なひと巻き軌道が2重巻き，4重巻き，8重巻き，というように一般に 2^n 分岐と呼ばれる分岐現象を繰り返し，ついには $n=\infty$ となる分岐の集積点を経てカオスが始まります。このような分岐は，Poincaré断面で見ると，切り口が，1点→2点→4点→… 2^n 点→…として現われますから，1次元写像では，第9図に示すような振舞いが見られます。第9図では，滑らかなひと山写像として，最も簡単なロジスティク模型

$$X_{n+1} = f(X_n) = rX_n(1-X_n), \quad 1 < r < 4 \tag{5}$$

を用いています。曲線 $f(X)$ が，傾き45°の直線と交わる点 X^* は写像の不動点，つまり，Poincaré断面



第8図　開軌道の 2^n 分岐（J. P. Crutchfield et al., Phys. Lett. **76A** (1980)1による）。

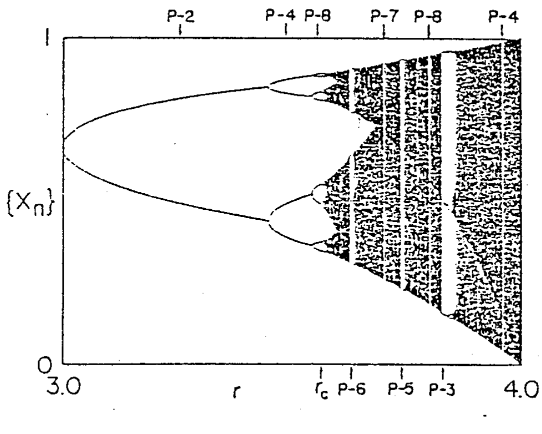


第9図　ロジスティク模型における 2^n 分岐。 a, b, cに対応してそれぞれ $r = 2.7$, 3.3, 3.5。

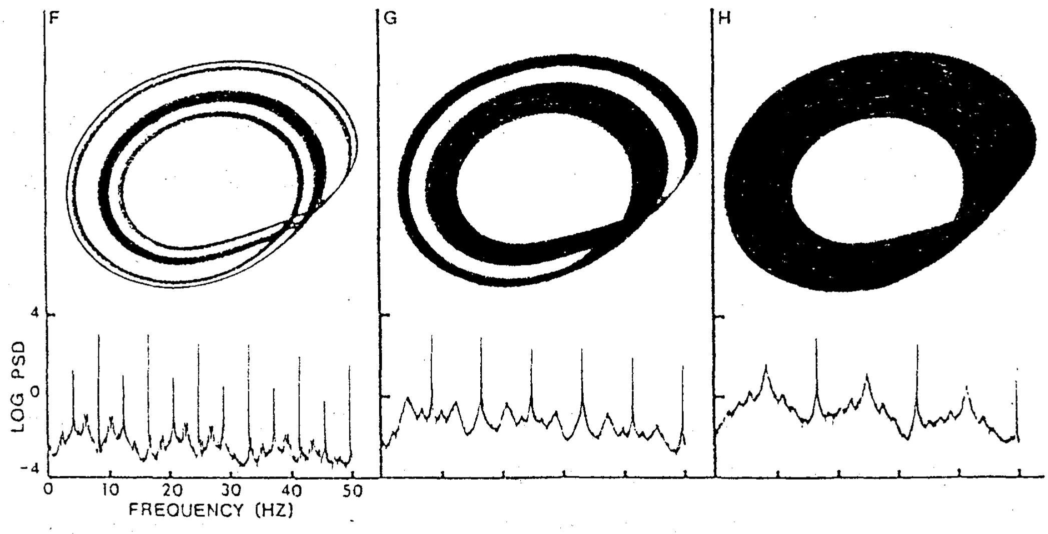
を一点で貫ぬくひと巻き軌道に対応しています。$r > 3$ では，X^*における $f(X)$の接線の勾配は，45°よりも平らですから，この不動点は安定です。$r > 3$ となると，X^*は不安定化し，安定な２点サイクルが X^* の両サイドに現われます。これは２重巻き軌道に対応しています。更にこれも不安定化する，という風にして，周期が倍々になってゆき，ついに $r = 3.5700$ において 2^n分岐が集積します。大雑把に言えば，集積点より上ではカオスと言って良いでしょう。確かに，初期条件に敏感な不安定軌道状態が，集積点を越えると現われはじめます。しかし，カオスにもいくつかの定義の仕方があり，そのひとつは前にも述べたように，カオスを周期軌道のある意味での豊富さに関連させようとするものです。この立場から，Li と Yorke は1975年に“Period Three Implies Chaos”というしゃれた題名の論文を出し，これがきっかけで，カオスという言葉がたちまち流行語になりました。なお“Period Three”は $r = 3.8284$ で現われます。このようなひと山写像の分岐構造に関する解説記号が，R. May によって1976年の Nature 誌上に載りましたが，これが Rössler にもまして，カオスの大衆化に貢献しました。この事に関連して興味深いのは，May が数理生態学の方面から一次元差分方程式のカオスにアプローチしたということです。ある生物種において，世代間に重なりがない場合，つまり現世代の個体がすっかり死滅した後に次の世代が繁殖力をもつようになる，というような場合には，個体数が世代とともに変動する過程は，微分方程式で

はなくて，差分方程式によって記述するのが正しく，ロジスティク模型というのも，この種のモデルの最も基本的なもののひとつに他ならないのです。線型のマルサス法則 $X_{n+1}=aX_n$ においては，個体数は指数関数的に爆発しますが，個体数が過剰になると生存条件が悪化する，という飽和効果は，最も簡単には，２次の非線型項によってとり入れられるでしょう。しかる後に，変数をスケールし直せば，ロジスティク模型が得られます。離散過程では，これが単に飽和をもたらすばかりではなく，抑制が効きすぎて振動をもたらしたり，更にそれ以上のことが起るわけです。Mayが提案している事ですが，ロジスティク模型のような簡単な非線型系で，実に変化に富んだ精妙極まりないダイナミクスが現われる，ということから，このような模型を，大学の数学教育の早い段階で採り入れて，学生に自ら計算させてはどうか，そうすれば，非線型性というものに対するセンスを養う上において，絶大な効果があるのではないか，と述べています。実際，今の時代でしたら，学生一人々々が一台づつ電卓をもつこともさほど困難ではないでしょうから，これは名案かも知れません。現在の教育は，フーリエ解析とか直交関数系とか，線型系に応わしい道具立てをいろいろ教えることは熱心ですが，ややもすると，新しい時代への展望を欠いているとも言えましょう。ところで，電卓ならぬ大型計算機をフルに活動させて，ロジスティク模型の大域的な分岐構造が明らかにされています（第10図）。２周期点が出現する $r=3.0$ 以後の分岐の様子が，手にとるようにわかります。2^4 周期点以上では余りに細かくてわかりませんが，理論的には 2^∞ まで達します。集積点 r_c を越えると非周期解が現われ，Xのある領域がバンドとして塗り潰されます。よく見ると，r_c のすぐ上では，バンドは多くの島々に分かれています。しかし，r の増大とともに，それらは融合し，やがて単一のバンドとなります。このバンド融合構造が，2^n 分岐を r_c を境にして折り返したような構造になっているのは興味深いことです。また第11図に示すように，同じふるまいは微分方程式等でも見られます。ひとつの特徴的なことは，島々に分かれているうちは，運動に周期的な成分が残り，スペクトルで見ると，線成分とひろがった成分とが共存することです。これは，島々の巡回は完全に周期的に行われるが，同一の島内での運動には周期的な運動成分が存在しないということの反映です。このようなカオスさ，島カオスとか周期的なカオス，あるいはエルゴード理論の言葉を借用して，混合性を欠いたカオス，などと称します。第10図にかえると，更に気付くことは，バンド領域の間に多くの縦縞が入っていることで，これらは周期軌道が安定に存在する領域で，ウインドーと呼ばれています。このように，カオス領域といってもその構造は複雑をきわめ，ロジスティク模型に限っても，その性質がすっかり理論的に明らかにされているとは到底申せません。最近のひとつの話題（といってもブームは過ぎた感がありますが）は，M. Feigenbaumの理論をめぐるものです。これは r_c において起る相転移類似現象に対する繰り込み群的理論なのですが，事実，臨界指数に類似の指数として

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\frac{r_n-r_{n-1}}{r_{n+1}-r_n} \qquad (6)$$

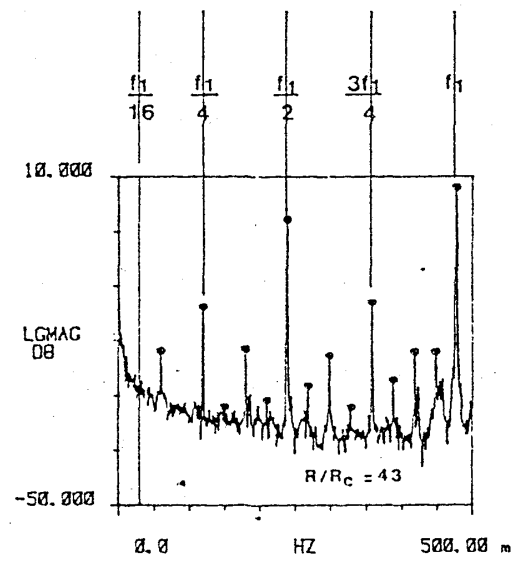


第10図　ロジスティック模型の大域的分岐構造
J. P. Crutchfield et al.による）。



第11図　Rösslerアトラクタのバンド融合（J. P. Crutchfield et al., Phys. Lett. **76A** (1980)1による）。

が定義できます。つまり，2^n周期点が安定に存在するパラメタ領域が，nの増大とともに，指数関数的に狭くなる，という事実に基く指数で，$f(X)$の頂点近傍が2次曲線であるようなひと山写像ならば，ロジスティク模型に限らず，$\delta=4.6692\cdots$なる普遍的な値をもちます。但し，δの計算は，解析的には近似計算によるしかありません。証明はされていませんが，経験的には，集積点近傍のふるまいに関するユニバーサリティは，一次元写像の範囲をはるかに越えて成立するものです。その最も顕著な例として，J. LibchaberとJ. Maurerによるベナール対流の実験があります（第12図）。ベナール対流においては，系の大きさ，幾何学的形状その他の条件によって，乱流に至る経路がひと通りではないことは前にも述べましたが，ある場合には，彼等が見出したような美しい2^n分岐となります。実験では16周期まで観測されています。生態学の一次元差分モデルで得られた特徴が，自由度無限大の流体において再び現われるなどとは，一昔前には全く考えられもしない事でした。



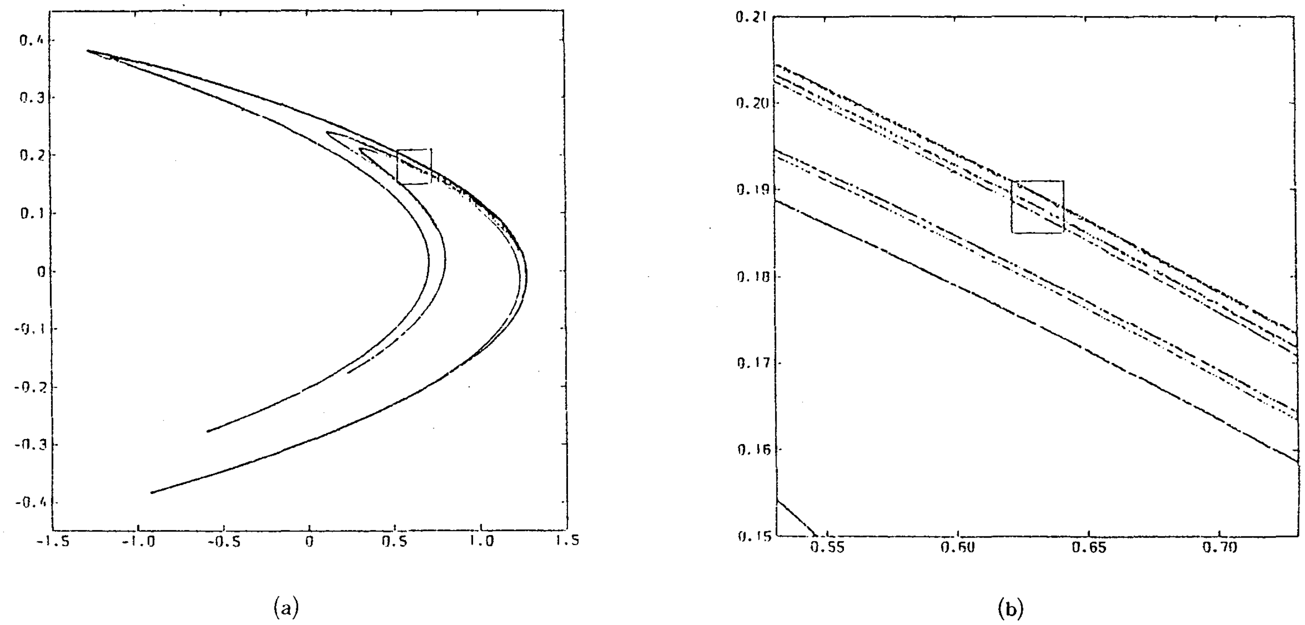
第12図　ベナール対流実験における2^n分岐を示すスペクトル
A. Libchaber and J. de Physique **41** (1980)C3-51 による）。

Feigenbaumの理論においても基礎になっている考え方ですが，2^n分岐の集積という現象は，集積点に近づくに従って，パラメタやXを適当にスケールし直せば，全く同じ分岐現象が無限回繰り返されているかのように数学的に表現することもできます。このような自己相似的な特性は，臨界現象の場合もそうですが，ハミルトニアンや運動方程式にはもともとあらわには含まれていなかったような，非常に長いあるいは短い時間的（空間的）スケールが，特殊な物理的状況においては，自発的に生成される，というこ

とと関係があります。例えば，2^n（$\gg 1$）というような長い時間スケールは，模型に含まれる時定数とは桁違いです。ストレンジ・アトラクタの微細構造に自己相似性が現われるのも，同様の原理によると見ることができます。さきに，ストレンジ・アトラクタは無数のシートから成っている，と言いましたが，この無限の折りたたみ構造が自己相似性をもっているわけです。この特徴構造は Poincaré 断面にも現われます。二次元写像の良く知られたモデルとして，Hénonの写像

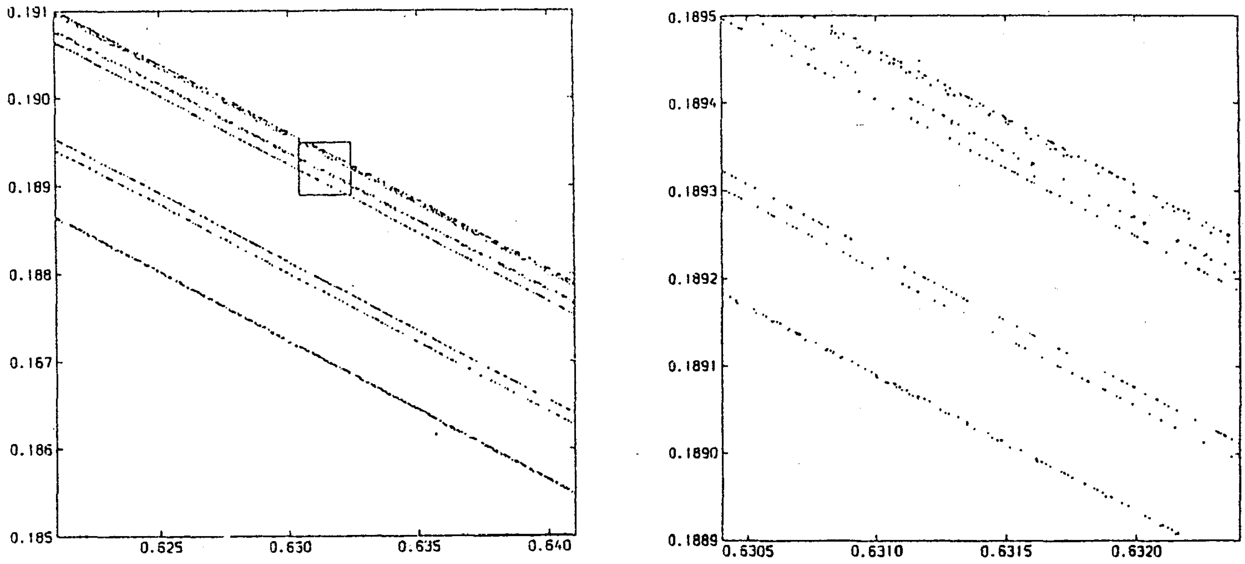
$$X_{n+1} = 1 - aX_n^2 + bY_n, \qquad Y_{n+1} = X_n \tag{7}$$

がありますが，これから得られる XY 面内の奇妙なアトラクタは，Rösslerアトラクタの Poincaré 断面によく似た構造をもっています。(7)はロジスティク模型の一般化になっていて，$b=0$ とすればロジスティクに帰着し，丁度 Rössler アトラクタの Poincaré断面を，一次元近似したような曲線（放物線の一部）が得られますが，$b \neq 0$ とすると，この曲線に"厚み"が生じます。この"厚み"は詳しく調べると，確かに無数のシートをもっているように見えます。第13図はこれを示したもので，一定の拡大率で次々に内部構造を探ってゆくと，全く同一の構造が見えてくるのです。このような特徴を有する対象を特徴づけるのに，Cantor 集合という概念が有力です。数学の方面でも，最初のうちは，病的で余り意味が無い，とさえ言われていた Cantor 集合概念が，現実の物理現象に関連して顔を出しはじめたのは誠に興味深いことです。Cantor 集合とは次のようなものです。即ち，第14図に示すごとく，1本の線分の中央⅓を取除き，次いで残された2本の線分の各々の中央の⅓を取除き，という操作を無限回行って最後まで残った集合が古典的 Cantor集合です。より一般的な Cantor 集合を作ることも勿論可能です。Hénon のアトラクタもこれと類似の構造をもっていることがおわかりでしょう。 Cantor 集合と密接な関係があり，且つ具体的な現象を扱う上において，これよりも融通性に富んだ概念としてのフラクタル次元（又は Hausdorff 次元とも言う）なるものが，最近方々で話題にのぼるようになりました。これは，B. Mandelbrot に



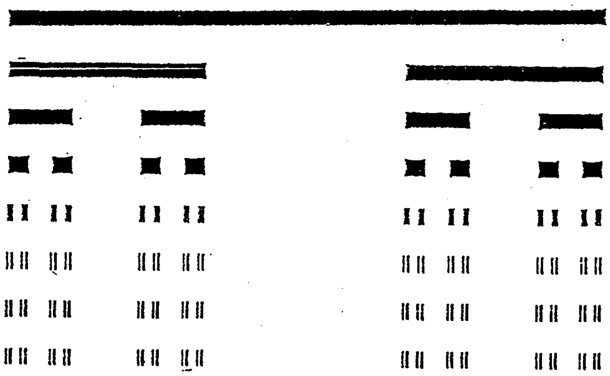
(a) (b)

第13図

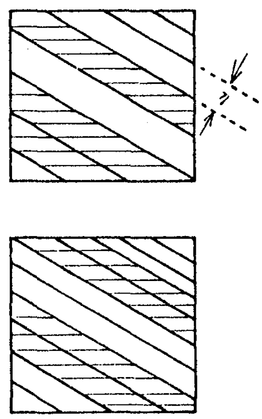


(c) (d)

第13図　Hénonアトラクタの微細構造（M. Hénon, Comm. Math. Phys, **50** (1976) 69 による）。



第14図　Cantor集合の作り方（文献 8) による）。



第15図　Hénonアトラクタを粗さηの格子を通して見れば3本の線に見えたり（上図），より小さなηをとれば（下図）4本に見える。

による“Fractals”という本が1977年に出版されたのがきっかけです。第14図に示したCantor集合も，第13図のHénonアトラクターも，その一部がそれを含むより大きな部分と相似である，という特徴があります。これらのフラクタル次元はどうか，というと，次のように考えます。Hénonアトラクタを例にとると，第15図のように，アトラクタのシートに平行に多くの短冊を作り，空でない短冊の本数をnとします。短冊の幅ηをゼロに近づければ，nはいくらでも大きくなります。そこで

$$n(\eta) \sim \eta^{-D} \quad (\eta \to 0) \tag{8}$$

なる形を仮定し，これで以て，一本のシートを一点と見なした時の点列のフラクタル次元Dを定義します。アトラクタ自身のフラクタル次元は勿論$D+1$です。同様の原理をCantor集合に適用すれば，$D=\log 2/\log 3=0.630$……となることはすぐに判るでしょう。明らかに，有限個の点に対しては$D=0$，一本の線に対しては$D=1$となって，整数の場合には普通の次元の定義と一致しています。自然界には，特徴的な長さ（時間的，空間的）が一見存在しないような現象が多く見られます。実際には，そこでは特徴的な長さが非常に大きいものと小さいものとに分離していて，こうした場合，中間領域には（もし何らかの構造がありうるとすれば）自己相似構造が現れざるを得ないのです。そうでなければ，特性長が無いということに反するからです。前にもふれた2次相転移の臨界点，それから充分に発達した乱流の速度場の構造はこの重要な例です。Mandelbrotによると，もっと身近かな例も数多くあり，今後の統計力学の課題として大変魅力的に思われます。

カオスはこのように，従来物理学固有の分野では余りかえりみられなかったユニークな概念をどん欲に利用して，その理解が進んでいます。けれども，なお余りにも未知の要素が多く，文字通り混沌としています。そこからはまだ本当に深みのある物理（例えば相転移の物理におけるような）は出ていないと言えます。流行を追ってしのぎを削るのも良いでしょうが，もっと長い目で見れば，カオスは我々の想像をはるかに越えた変転を示すでしょう。それは10年前の状況がどうであったかを振り返れば明らかです。ともあれ，可能性に富んだ混沌です。荘子のように，創造性の母体としての混渾であれば，あせって目鼻をつけようとすることは危険であるかも知れません。

参考文献

1) H. Poincaré: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste,* Dover Press (1957).

2) E. N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow, J. Atmos. Sci. **20** (1963) 130.

3) D. Ruelle and F. Takens: On the Nature of Turbulence, Comm. Math. Phys. **20** (1971) 167.

4) O. E. Rössler: An Equation for Continuous Chaos, Phys. Lett. **57A** (1976) 397.

5) T. Y. Li and J. A. Yorke: Period Three Implies Chaos, Amer. Math. Monthly **82** (1975) 985.

6) R. M. May: Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics, Nature **261** (1976) 459.

7) M. J. Feigenbaum: Quantitative Universality for Nonlinear Transformations, J. Stat. Phys. **19** (1978) 25.

8) B. Mandelbrot: Fractals — *Form, Chance, and Dimension,* W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1977.

なお，カオスに関する総合的解説としては

R. Helleman: Self-Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics* Vol.5 ed. E. G. D. Cohen, North Holland, Amsterdam and N. Y. 1980, p. 165. が面白く読める。