

$$Q' \propto \omega \propto B^{-\frac{n-1}{2n}}$$

したがって、前述した  $B_m$  と  $m$  の関係は

$$B_m \propto m^{-\frac{2n}{n-1}} \quad (10)$$

である。(10)式は計算機シミュレーションの結果とほぼ一致する。しかし、これらの議論が適用できるのは散逸が大きい場合だけでありホモクリニックサイクルが生じた場合のカオスの構造を究明する必要がある。

### 文 献

- 1) Y. Ueda, Steady motion exhibited by Duffing's Equation. Presented at the Engineering Foundation Conference on NEW APPROACHES TO NONLINEAR PROBLEMS IN DYNAMICS, Monterey, California. Dec. 9-14, 1979.
- 2) 上田院亮, 非線形性に基づく確率統計現象 — Duffing 方程式で表わされる系の場合 — 信学論(A), 53-A 22, P167.
- 3) 川上博, 松尾次郎, ダフィング方程式にみられる周期解の分岐現象, 信学論(A), J64-A, 12, P1018 (昭56-670).

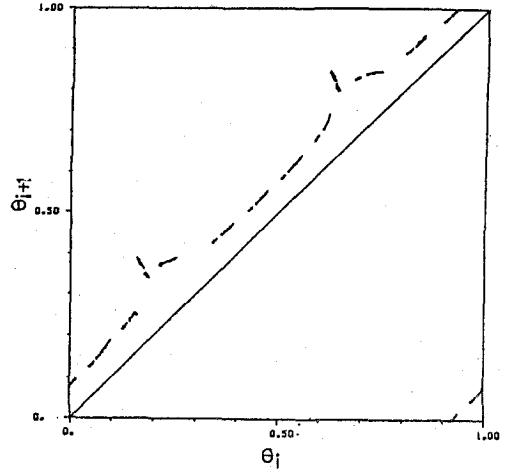


Fig. 4

## 結合反応系の分岐集合の単純な性質

東北大・通研 佐野雅已・沢田康次

非線形振動子を強制振動したり、複数個結合させた時の解の振舞は、古くから調べられている<sup>1)</sup>。しかし、従来から知られている higher harmonic, subharmonic の phase-locking 状態や準周期運動のような単純なアトラクターの他に、カオス状態も存在すること、さらに、これら周期解とカオス領域が極めて入り組んで、大域的構造をなしていることが知られたのはごく最近のことである。この現象に対する理論として保存系では、KAM理論を始めとした研究があるが、散逸系での研究は殆んどない。最近の報告では、散逸系においても準周期軌道が壊れる際に様々の普遍則が存在することが示されており、新たな展開も期待される。

ここでは、非線形振動子 ( Brusselator ) を 2 個結合させた系において各々の自然周波数の比と結合定数を変化させたときの振舞を数値計算により調べた。方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= A_i - (B_i + 1)X_i + X_i^2 Y_i + C_X(X_j - X_i) \\ \dot{Y}_i &= B_i X_i - X_i^2 Y_i + C_Y(Y_j - Y_i) \quad (i, j = 1, 2, i \neq j) \end{aligned}$$

簡単のため、 $C \equiv C_X = C_Y$ 、 $B_i = A_i^2 + 2$  ( $B_i > B_C = A_i^2 + 1$ ) とおいて  $A_2/A_1$  と  $C$  を変化させて解の分岐を調べた。 $i = 1$  の振動子の適当な位相でポアンカレ横断面をとり、その  $(X_2, Y_2)$  平面への射影をとると図 4 のようなアトラクターが得られる。周期解を分類するため、rotation number  $W$  を

計算すると解の大域的分岐集合の形はおおよそ図 1 のようになる。図 1 は  $W$  がごく単純な分数の解だけしか示していないが、さらに詳しく見ると次の Farey 数列で表わされる rotation number を持った解が存在する。(図 2) 一例として  $A_1 = 1.6$ 、 $A_2 = 0.42$  の直線上で  $C$  を変化させると  $W = 1/4 \sim 1/1$  の間の分数の周期解が見られ、各周期解は不安定化する際、 $C$  を増せば  $2^n$  分岐、 $C$  を減少させると Intermittency を起こしてカオスに至る。Farey 数列で表わされる分岐集合の間に何らかの規則性を見出すため、 $W$  のとる値の収束数列を選ぶ。典型的な選び方として、 $W$  が無理数の軌道に着目すれば連分数表示が考えられるが<sup>2)</sup> 測度の大きさに着目して、次の  $W = q_1/p_1$

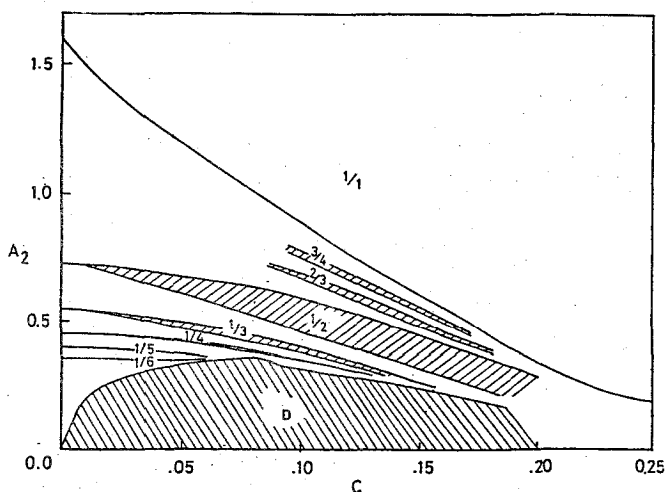


図 1

FAREY SERIES

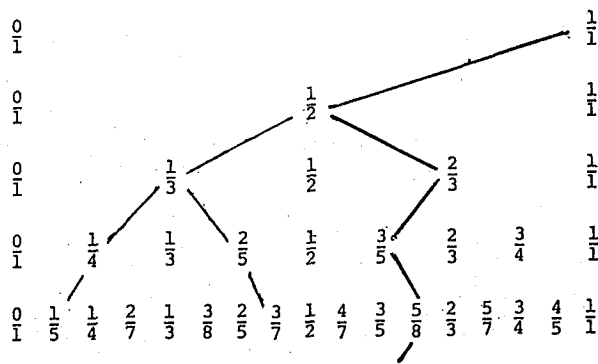


図 2

から  $q_2/p_2$  に近づく数列を考える。

$$\frac{q_2 n + (q_1 - q_2)}{p_2 n + (p_1 - p_2)}$$

$$\frac{q_1}{p_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{q_2}{p_2}$$

一例として、 $1/3$  から  $1/2$  に近づく数列  $W_n = n/2n+1$  をとり、 $W_n$  の解が現れるパラメータ  $C$  の値を  $C_n$  とおくと、次の関係が成立する。(図3)

$$C_n \propto n^{-2.0}$$

これは、差分系で金子<sup>3)</sup>が見出した規則に一致している。この他にも、様々の普遍則の存在が期待されるが、カオス発生の機構に注目することが重要である。その一つの試みとして、アトラクターとしての2次元トーラ

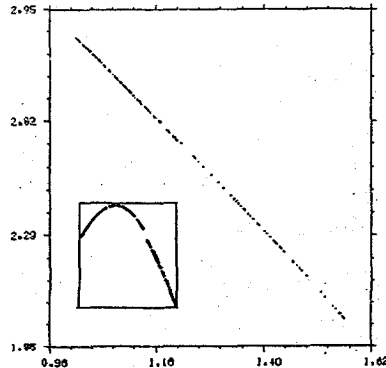
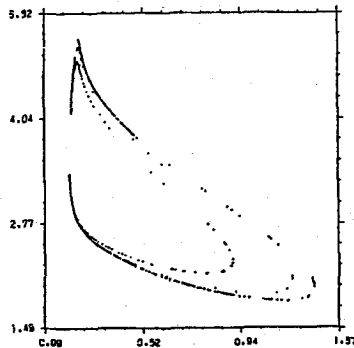
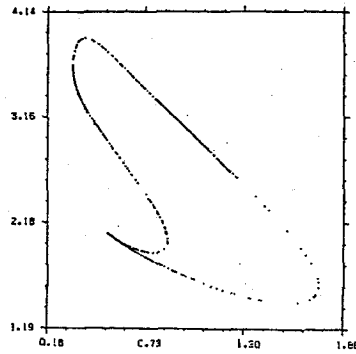
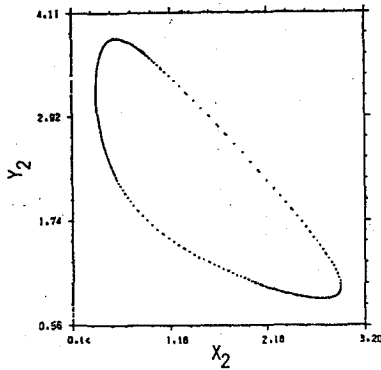
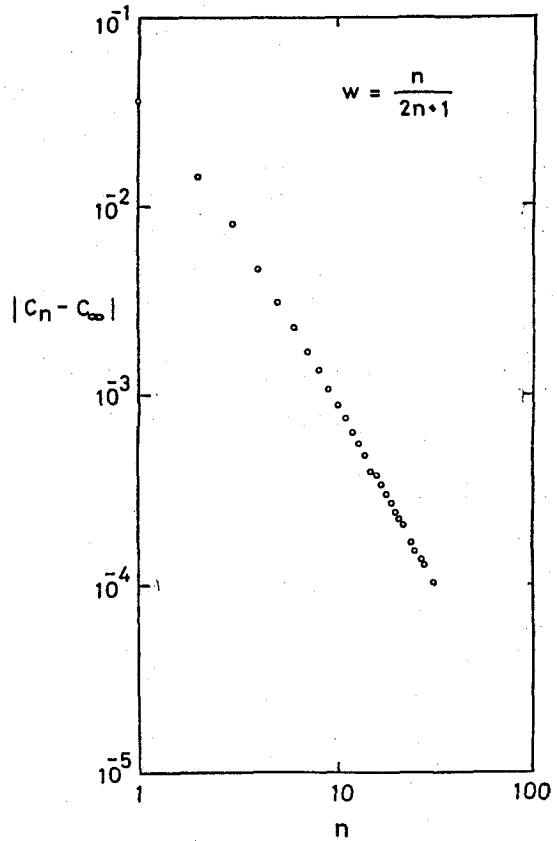


図 4

ス面が壊れて、カオスが発生する過程に焦点をあててポアンカレ横断面をとってみると図4のようになる。トーラス面上に折りたたみが生じていること、また、 $C$ を大きくするとトーラスは壊れたように見え、最終的には直線状のアトラクタに変化してしまう。折りたたみが生ずる臨界点での様々の普遍則を示すことは今後の課題である。

## 参考文献

- 1) V. I. Arnold; Trans. Am. Math. Soc. 2nd Ser. 46, 213 (1965)
- 2) S. J. Shenker (preprint)  
D. Rand et al.; Phys. Rev. Lett. 49, 132 (1982).
- 3) Kaneko; to appear Prog. Theor. Phys.

## 熱対流系のカオスの性質

東北大・通研 佐野雅已・沢田康次

熱対流系 (Bénard 対流系) の実験パラメータは、Rayleigh 数  $R$ 、Prandtl 数  $P = \nu/\kappa$ 、そしてアスペクト比 (容器の最長幅と高さの比) である。熱対流系は、静止した容器中に閉じ込められているため、外部からのノイズが少く実験は再現性に富み、乱流の発生過程の実験に好都合である。しかも、アスペクト比が小さい場合は、Rayleigh 数を上げていった時、不安定化する波数モードが少いため、連続系でありながら比較的少数自由度の系として振舞う。そのため散逸系のカオスの問題として扱うことが可能である。

熱対流系のカオスの発生過程のタイプを大きく分類すると表1のようになる<sup>1)</sup>。 $N$ はカオスが発生するまでに必要な Hopf 分岐の回数である。この分類をもとに現在までに行なわれた実験を調べると次のような問題点に達する。

- i)  $N = 2$  の場合は、これまで個々の実験結果がばらばらに発表されたのみで相互の関係を統一的に把えようとする実験がなかった。
- ii)  $f_2/f_1$  が無理数のままトーラスがカオスに至る場合が未観測である。
- iii) カオスの本質を探るには、これまでのパワースペクトラムのみによる方法では不十分で、ポアンカレ写像を得ることが重要である。
- iv) 初期乱流 (カオス) から発達した乱流に至るまでの実験 (空間相関の減少など) が無い。