

図 3

## Duffing 方程式の解の大域的相似性

東北大・工, 東北大・通研<sup>A</sup>

佐藤信一, 佐野雅巳<sup>A</sup>, 沢田康次<sup>A</sup>

### 1. はじめに

非線形強制振動における系の振舞いを探るという問題について典型的非調和強制振動である Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t \quad (1)$$

を考察する。Duffing 方程式により記述される系では, ジャンプ, 履歴現象,  $2^n$  分岐そしてホモクリニックサイクル等が観測される<sup>1,2)</sup> 系のパラメタ  $k$ ,  $B$  を変化させることにより, 高調波との Phase-locking, カオス領域が繰り返し現われる。それらの領域はパラメタ空間において相似構造をなしている<sup>3)</sup> 本研究では,

(i) パラメタ空間 ( $k-B$  平面) における相似構造に大域的なスケール則が成立する。

(ii) 一般化された  $n$  次の Duffing 方程式

$$\ddot{x} + k \dot{x} + x^n = B \cos t \quad (2)$$

においても同様にスケール則が成立する。

(iii) カオスおよび周期解の大域的スケール則が一次元写像にどう反映するか。

以上の3点について検討した。他の非線形システムでも Phase-locking, スケール則が観測されることから種々の性質に共通性があると考えられる。

## 2. Duffing 方程式の解の性質

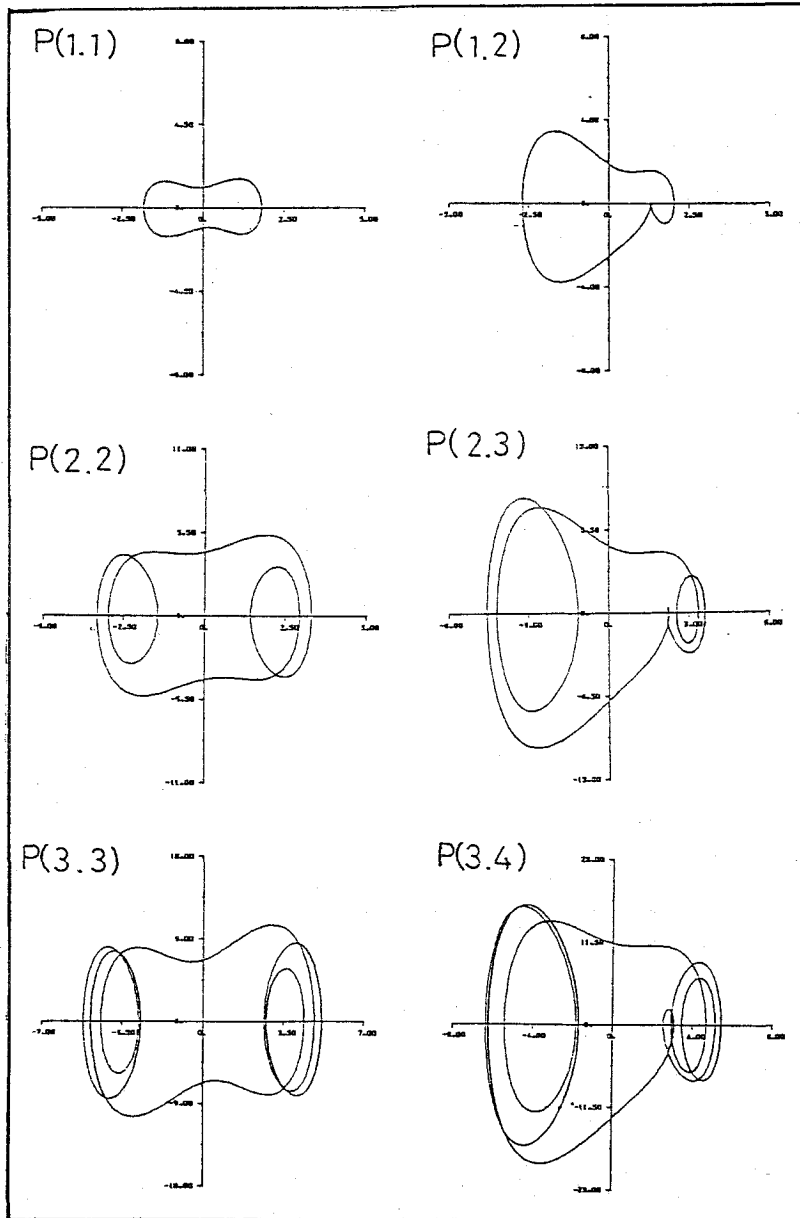


Fig. 1

(1)式を連立方程式に書き直すと

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ky - x^3 + B \cos t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

解の振舞いの概略は周期解を  $P$ , カオスを  $C$  として  $P \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow \dots$

さらに詳しく見ると同じ周期軌道でも  $xy$  平面上的の原点を中心とした  $\pi$  の回転に対称 ( $P_S$ ), 非対称 ( $P_\sigma$ ) の周期軌道が存在する。( Fig. 1 )

$$\begin{aligned} &\dots \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_\sigma(n, n-1) \\ P_\sigma(n-1, n) \end{array} \right\} \rightarrow C \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_\sigma(n, n) \\ \bar{P}_\sigma(n, n) \end{array} \right\} \rightarrow P_S(n, n) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_\sigma(n, n) \\ \bar{P}_\sigma(n, n) \end{array} \right\} \\ &\rightarrow C \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_\sigma(n, n+1) \\ P_\sigma(n+1, n) \end{array} \right\} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

方程式の対称性から非対称の解が存在するときこれを  $\pi$  だけ回転させた解も存在する。  $k-B$  平面において, これらの分岐集合は相似構造を持っており ( Fig. 2 )スケール則が成立する。

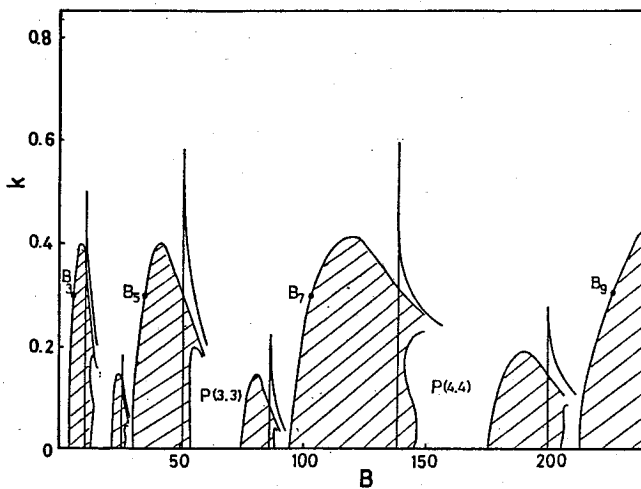


Fig. 2

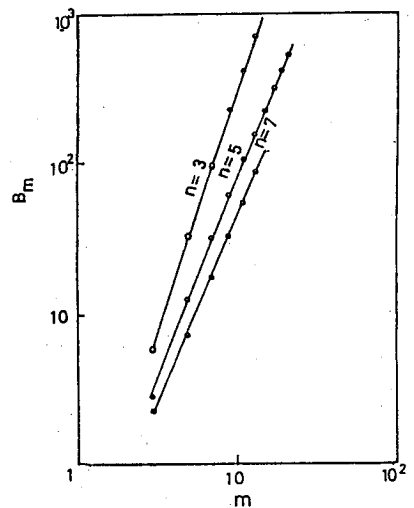


Fig. 3

スケール則は,  $B_m$  を  $P_\sigma(l, l+1)$  の周期軌道が周期倍現象を起こす  $B$  の臨界値,  $\alpha$  を定数として

$$B_m \propto m^\alpha \quad (m = 2l + 1) \quad (4)$$

である。( Fig. 3 )

## 3. 一次元写像

(2)式を考える前に

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^n = \cos \omega t \quad (5)$$

を考えることにする。この理由は後述のように(2)式の  $B$  に対してスケール則が存在する事は(5)式の  $\omega$  に対してスケール則が存在する事と同等であるからである。そして、(5)式の  $\omega$  をパラメータとして考える方が考えやすい。 $\omega$  が小さい極限 ( $B$  が大きいことに対応する) では、(5)式の右辺は定常で、damping のため振幅が小さい運動に近似できる。したがってその場合運動は、

$$\ddot{x} = -ax + B \cos \omega t$$

と類似している。ここで次の写像を定義する。 $x$  の時系列が極大値をとるときの時間  $t$  を  $t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots$  として、さらに外力の周期  $T (= 2\pi/\omega)$  とする。写像  $F$  は

$$F : t_i \rightarrow t_{i+1} \pmod{T} \quad (6)$$

$\omega$  の小さい極限においてこの写像は

$$F(t_i) = t_i + \Omega \pmod{T} \quad (7)$$

$\Omega$  は constant。  $\theta_i = t_i/T$  として

$$F(\theta_i) = \theta_i + \frac{\omega}{2\pi} \Omega = \theta_i + \Omega' \pmod{1} \quad (8)$$

周期  $m$  の軌道に対応する  $\Omega'_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \Omega \propto \frac{1}{m}$  である。このことは Duffing 方程式の非線形の次数  $n$  によらず、解の周期  $m$  は  $\omega_m^{-1}$  に比例する。実際には、計算機シミュレーションの結果から(8)式は

$$F(\theta_i) = \theta_i + \Omega' + \frac{\omega}{2\pi} N\left(\frac{2\pi}{\omega} \theta_i\right) \pmod{1} \quad (8')$$

と書かれる。 $N$  は非線形性のために生ずる項である。さて以上の事から(2)式の  $B$  の変化に対する軌道の変化を議論する事ができる。(5)式に変数変換

$$\left. \begin{aligned} \omega t = \tau & & \omega^{\frac{2}{n-1}} x = X \\ \omega k = K & & \omega^{-\frac{2n}{n-1}} = B \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を行うと(2)式の形にすることが出来る。この変換により解の性質は不変であるから

$$Q' \propto \omega \propto B^{-\frac{n-1}{2n}}$$

したがって、前述した  $B_m$  と  $m$  の関係は

$$B_m \propto m^{-\frac{2n}{n-1}} \quad (10)$$

である。(10)式は計算機シミュレーションの結果とほぼ一致する。しかし、これらの議論が適用できるのは散逸が大きい場合だけでありホモクリニックサイクルが生じた場合のカオスの構造を究明する必要がある。

### 文 献

- 1) Y. Ueda, Steady motion exhibited by Duffing's Equation. Presented at the Engineering Foundation Conference on NEW APPROACHES TO NONLINEAR PROBLEMS IN DYNAMICS, Monterey, California. Dec. 9-14, 1979.
- 2) 上田院亮, 非線形性に基づく確率統計現象 — Duffing 方程式で表わされる系の場合 — 信学論(A), 53-A 22, P167.
- 3) 川上博, 松尾次郎, ダフィング方程式にみられる周期解の分岐現象, 信学論(A), J64-A, 12, P1018 (昭56-670).

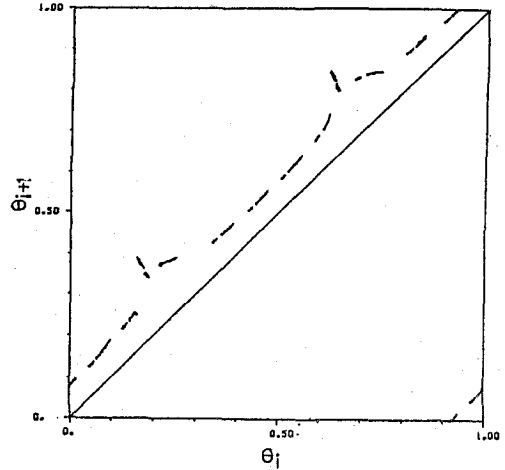


Fig. 4

## 結合反応系の分岐集合の単純な性質

東北大・通研 佐野雅已・沢田康次

非線形振動子を強制振動したり、複数個結合させた時の解の振舞は、古くから調べられている<sup>1)</sup>。しかし、従来から知られている higher harmonic, subharmonic の phase-locking 状態や準周期運動のような単純なアトラクターの他に、カオス状態も存在すること、さらに、これら周期解とカオス領域が極めて入り組んで、大域的構造をなしていることが知られたのはごく最近のことである。この現象に対する理論として保存系では、KAM理論を始めとした研究があるが、散逸系での研究は殆んどない。最近の報告では、散逸系においても準周期軌道が壊れる際に様々の普遍則が存在することが示されており、新たな展開も期待される。