らい小さいかということも重要であって，渦流の形成の場合，前者は流出量（それは同時に外から供給している流入量でもある）によって決まるが，後者は粘性係数によって決まるということがわかった。

熱流下での超流動転移および渦乱流

九大・理　　小　貫　　　明

熱流下での臨界現象については理論家の注目するところではなかったが，豊富な可能性を含んでいる。物質をとりあえず次の３つのカテゴリーに分類する。

(a)　熱伝導率 λ の発散がなくまた流体力学的不安定性のないもの。多くの磁性体や合金など。この場合は粗視化された Ginzburg-Landau 方程式のレベルで局所平衡の考えが許される。即ち，局所的温度として $\tau_0+(d\tau/dx)x$ を使ってよい。x は場所を表わす。

(b)　２成分溶液では λ は有限だが熱拡散効果のため，Soret instability が生じやすい。gas-liquid 転移する液体では λ が発散し局所平衡は使えず，しかも Benard instability が生じやすい。

(c)　超流動ヘリウム。^{3}He－^{4}He や He-film もこの部類にいれておく。この系では超流動成分が運ぶことより特異な現象がおこる。以下は３次元の ^{4}He での計算を解説する。詳しくは，Jour. Low. Temp. Phys.に掲載される。

主な現象として次の２つが際立っている。

(i)　不均一構造ができること。これは磁場下の超伝導体の多様な構造を想起させる。

(ii)　超流動成分の存在する領域では，ある程度以上熱流が大きいと，vortex が集団的にできからみあう。このため小さいながらも熱抵抗が生じ，温度勾配ができる。

(i)については過去の理論はない。従前のアプローチとしては一様な熱流の存在する状態の不安定性に注目している。例えば Mikeska や Langer のもの。He Ⅰ と He Ⅱ の interface については実験家には気づかれていたが，理論がないため，曖昧なまま見過ごされてきた。(ii)の vortex 乱流については厖大な実験があるが，理論としては Vinen (1957) と Schwartz (1978) のみがあげられる。いずれにしろ自由エネルギーが存在しないため数学的困難が大きい。

§ 2.　He Ⅰ と He Ⅱ の Interface

Ahlers (1968) や Bhagat (1971) はHe I とHe II の境界が熱流下で存在しゆっくりと動くことを見い出している。He II の部分では温度勾配は vortex によるもので極めて小さいが，He I の部分では温度勾配が桁違いに不連続的に大きくなる。例えば Bhagat らの実験で $Q=$ 25mW/㎠のとき $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ がHe II では 10^{-4} deg/㎝位でHe I では1～10deg/㎝位である。このような境界層は超伝導体に磁場Hを印加したときのものと，理論的な類似性がある。対応は次の通りである。

$$Q\to H,\ \nabla T\to \boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A},\ T\to \boldsymbol{A}.$$

ここで super-phase では∇Tもしくは$\boldsymbol{B}$は0， normal-phase では∇T もしくは$\boldsymbol{B}$は大きな値をとる。QもしくはHは場所によらない。私の理論的結論として重要なことは，super 部分では小さい vortex による friction を無視すればTは一定で，しかも$T_\lambda - T$はQの一意的な関数であることである。動的スケーリングを仮定すれば$T_\lambda - T\propto Q^{3/4}$ となる。超伝導の場合もHは臨界磁場$H_c\propto T_c - T$に等しくなければならず$T_c - T$はHに比例している。この予測は Bhagat らの実験と consistent である。彼らは実験式$T_\lambda - T = 5.9\times 10^{-5}\,Q$ deg (Q in mW/㎠) をえている。私の結果は$T_\lambda - T = 1.9\times 10^{-5} R_\infty Q^{3/4}$ である。ここでR_∞は1のオーダーの数で未計算の量。

理論的には Halperin らの F-model を出発点にする。

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathrm{i}\,g_0\,\mu\psi - \Gamma_0\frac{\delta}{\delta\psi^*}H\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}m = g_0\,\mathrm{Im}(\psi^*\nabla^2\psi) + \lambda_0\nabla^2\mu \tag{2}$$

ここでψはオーダーパラメター，mはエントロピー，そして

$$\mu = \frac{\delta}{\delta m}H \tag{3}$$

GL energy Hは次のようにかける。

$$H = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{1}{2}r_0|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + r_0 m|\psi|^2 + \bar{u}_0|\psi|^4 + \frac{1}{2\chi_0}m^2\right] \tag{4}$$

μは温度のゆらぎを表わしている。Hの中に$r_0 m|\psi|^2$という項が存在することが熱流の問題には重要である。これはエントロピーの値がふえると，温度も必ずふえることを意味する。$r_0=0$とする E-model は不適当である。以下では1次元的な interface を表わす定常解を求めてみよう。この時$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\mathrm{i}\,\omega_0\psi$，$\frac{\partial}{\partial t}m = 0$で，$\omega_0$は自動的に決まる。

熱流Qは次のように表わされる。

$$Q = k_B T_\lambda \left[g_0 \mathrm{Im}\left(\psi^* \frac{\partial}{\partial x}\psi\right) + \lambda_0 \frac{d}{dx}\mu \right] \quad 。 \tag{5}$$

$x \to -\infty$では系は super-phase で，

$$\psi \to f_\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega_0 t)}, \quad \tau \equiv r_0 + 2 r_0 \chi_0 \mu \to \tau_\infty \tag{6}$$

$x \to \infty$では系は normal-phase で，

$$\psi \to 0, \quad \mu \to Qx/(\lambda_0 k_B T_\lambda) + \mathrm{const.} \tag{7}$$

次に(1)の両辺にψ^*/Γ_0を乗じ虚数部分をとってみると，

$$\mathrm{Im}\left(\psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right) = -\left(\mathrm{Re}\frac{1}{\Gamma_0}\right)(g_0\mu - \omega_0)|\psi|^2 \tag{8}$$

この式と(2)を組み合わせて，

$$\lambda_0 \frac{d^2}{dx^2}\mu = -\left(\mathrm{Re}\frac{1}{\Gamma_0}\right) g_0 (g_0\mu - \omega_0)|\psi|^2 \tag{9}$$

ここで Onsager 係数Γ_0は一般的に虚数である。(1)と(9)を無次元化しよう。$\Psi = \mathrm{const.}\,\psi$, $A = 1 - \tau/\tau_\infty$, $z = \mathrm{const.}\,x$として，

$$\frac{d^2}{dz^2}\Psi = \kappa^2 \left[-1 + \left(1 - \frac{\mathrm{i}a_0}{1+\mathrm{i}c_0}\right)A + |\Psi|^2 \right]\Psi \ , \tag{10}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}A = |\Psi|^2 A \quad . \tag{11}$$

ここで(10)の右辺の項$[1 - \mathrm{i}a_0/(1+\mathrm{i}c_0)]A$を$A^2$でおきかえると，(10)と(11)は GinzburgとLandau の導いた有名な超伝導体の式と一致する。ここで$a_0 \sim 3$, $c_0 \sim 1$であり，Aの前の係数の虚数部分は大きい。$a_0 \neq 0$ということはΨの phase が熱流方向に変化し超流動カレントが存在することを意味する。“ GL parameter ” κは次のようになる。

$$\kappa^2 = 4u_0\lambda_0|\Gamma_0|^2/g_0^2\,\mathrm{Re}\Gamma_0 \cong 0.1 f_0^{-1} \tag{12}$$

ここでf_0はmとψの mode coupling の強さを表わす無次元量で$T \cong T_\lambda$では1のオーダーとなる。$\varepsilon = 4-\mathrm{d}$展開によると$\kappa = 0.346 + O(\varepsilon)$。超伝導の場合は((10)，(11)で const. $A \to A^2$とすると)ある積分が存在するが，我々の場合は，次の量が積分。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A+\kappa^{-2}a_0^{-1}(1+c_0^2)\,\mathrm{Im}\left(\Psi^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Psi\right)=\mathrm{const.} \tag{13}$$

これは(5)を無次元化したものである。注意すべきは(13)の値が一意的な（Qによらぬ）定数であることである。このことより $Q/|\tau_{\infty}|^{3/2}=\mathrm{const.}$ がでてくる。 interfacial profile は $\kappa\ll1$ と $\kappa\gg1$ の場合に近似的に求まる。上に説明した計算はゆらぎを無視した平均場近似であるが，動的スケーリング則を仮定すると， $Q/|T_\lambda-T|^{3/4}=\mathrm{const.}$ になる。私は初めは(1)(2)の定常解を求めるべく努力したが歯が立たなかった。しかし(10)(11)のように変形すれば Ginzburg-Landau の卓越した数学的技巧をまねることができるのであった。

§ 3. 熱流下での相転移

1次元的な cell を考えよう。$0<x<L$に helium は存在し熱流Qが流れている。$x=0$，Lでの温度 T_0，T_L を動かすとどのような相転移がおこるだろうか。ここで $T_0<T_\lambda<T_\mathrm{L}$ とする。 helium では第一種超伝導体の磁場下でのふるまいに似た現象がおこる。このことはκが1よりかなり小さいことに原因がある。はじめに系が normal（= disorder）として，Qを小さくしていく，もしくはT_0 を低くしていく。すると，一次転移がおこる。現象は第一種超伝導と似ている。しかし我々の場合は free energy が存在しないため，(1)，(2)の式の動的な不安定性を考えねばならない。具体的には不安定化する mode の振幅について Landau 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A|=\alpha|A|-\beta|A|^3 \tag{14}$$

を考え係数αとβを計算する。$\kappa\ll1$では$\beta<0$になる。系の大きさLが充分大きいとT_0 の次の領域で He Ⅰ と He Ⅱ が共存する。

$$R_{\mathrm{1b}}t_\mathrm{c}<(T_\lambda-T_0)/T_\lambda<R_{\mathrm{sc}}t_\mathrm{c}\,, \tag{15}$$

ここで $t_\mathrm{c}=0.9\times10^{-5}Q^{3/4}$（$Q$ in mW/㎠）。(15)の温度領域で interface が$0<x<L$のどこかに存在する。これは超伝導の中間状態に対応する。また $R_{\mathrm{1b}}\sim\kappa^{1/3}$，$R_{\mathrm{sc}}\sim\kappa^{-2/3}$ はuniversal number である。(15)はT_0が$T_\lambda(1-R_{\mathrm{1b}}t_\mathrm{c})$より低くなると，不連続的に superphase が低温の boundary 近くにできることを意味している。例えば$Q=0.1$mW/㎠ だと $R_{\mathrm{1b}}t_\mathrm{c}\sim10^{-6}$ である。このように一次転移することは，薄い cell（しかし bulk な系）において観測しやすい。転移がおこると実効的な熱伝導率は He Ⅰ の bulk な値よりずっとふえる。このことは従来「なぞ」とされてきた Archivald らの実験を説明しているように考えら

れる。彼らは，Ahlers の場合よりはるかに大きな Q で薄い cell ($L = 10^{-2} \sim 10^{-3}$ cm) を使い，λ を $T \cong T_c$ で測定している。すると，実効的な λ は bulk な λ より 1 ケタ位大きくなる。これは系が共存状態にあるからだというのが私の解釈である。

Interface が安定に存在するということは，転移が 1 次であることを実は示しているのである。また 1 次であるということは（このことが明確に意識されない限り）従来の実験結果がバラバラで曖昧であったことの原因となっているだろう。

§ 4.　Vortex 乱流

Interface の存在する場合を考えよう。super の部分では $T_\lambda - T \propto Q^{3/4}$，$\rho_s \propto Q^{1/2}$，$v_s \propto Q^{1/2} \propto (T_\lambda - T)^{2/3}$ である。superfluid velocity v_s を評価してみよう。

$$v_s = 4.2 \times 10^3 R_\infty^{-4/3} \, |t_\infty|^{2/3} \, \mathrm{cm/sec} \tag{16}$$

ここで $t_\infty = (T - T_\lambda)/T_\lambda = -R_\infty t_c$ である。R_∞ は 1 のオーダーの universal number である。(14)は Clow-Reppy の critical velocity $v_c = 3.8 \times 10^2 |t|^{2/3}$ cm/sec と比べてみるとわかるように，$v_s \gg v_c$ である。ここで $R_\infty \sim 1$ と仮定した。このことはいかなる Q に対しても super-phase では vortex 乱流になっていることを意味している。このため有限の熱抵抗が super の領域で存在する。この大きさは次のように評価できる。

Schwartz の考えに従えば vortex の間の平均的間隔 δ は次の式で与えられる。

$$\delta \sim \frac{\hbar}{m} (\log \Lambda)/v_s \tag{17}$$

ここで $\Lambda = \delta/\xi$ である。単位体積の vortex line の長さ L は δ^{-2} で与えられる。Vinen によると，

$$s \, \mathrm{d}T/\mathrm{d}x \sim \frac{2\pi}{3} B(\hbar/m) L \tag{18}$$

s は単位体積あたりのエントロピーで B はいわゆる mutual friction coefficient と呼ばれるものである。私の最近の計算によると T_λ 近くで $B \cong 2\,\mathrm{Re}\,\widetilde{\Gamma}/\log\Lambda \propto (T_\lambda - T)^{-1/3}$ である。ここで $\widetilde{\Gamma}$ は Halperin らの定義した kinetic coefficient Γ と $(\hbar/2m)\widetilde{\Gamma} = \Gamma$ でつながっている。以上のことより，$t = (T - T_\lambda)/T_\lambda$ として

$$\mathrm{d}t/\mathrm{d}x \sim 0.04(\log\Lambda)^{-3} \, k_c \, t_c^{10/3} \, |t|^{-7/3} \tag{19}$$

ここで $t_c = 0.9 \times 10^{-5} Q^{3/4}$，$k_c = 0.7 \times 10^8 \, t_c^{2/3} \, \mathrm{cm}^{-1}$，Interface の温度は $-t_c$ のオーダ

一なので，(19)は $|t| \gg t_c$ で使える。一方，normal phase では，$t \gg t_c$ で，

$$d t / d x \cong k_c t_c^{4/3} t^{-1/3} \quad . \tag{20}$$

t_c と k_c は(20)の右辺の係数が1になるよう定義してある。$X = k_c x$，$J = t/t_c$ と定義して，

$$J \cong -\left[0.1(\log \Lambda)^{-3} |X|\right]^{3/10} \qquad \text{for} \quad X \ll -1 \quad , \tag{21}$$

$$\cong \left(\frac{4}{3} X\right)^{3/4} \qquad \text{for} \quad X \gg 1 \quad , \tag{22}$$

$\Lambda \gg 1$ であるから t は super phase で極めてゆっくり変化する。この章の内容は未発表です。

§5. まとめ

^{4}He，^{3}He－^{4}He，^{3}He，あるいは He-film などにおける流れのある時のふるまいは大変面白くまた未知の分野である。ただ線型応答に関する限りは新味はないであろう。またこのような系ではいわゆる second sound, third sound が存在するので周期的 modulation に対し面白いふるまいをすると思われる。例えば periodic spinodal 分解。

文　献

1) A. Onuki, submitted to Jour. Low. Temp. Phys.
2) V. F. Vinen, Proc. Roy. Soc. A, **242** (1957) 493.
3) K. W. Schwartz, Phys. Rev. **18** (1978) 245.
4) G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 1159.
5) S. M. Bhagat and R. A. Lasken, Phys. Rev. **A3** (1971) 340; ibid. **A4** (1971) 264; ibid. **A5** (1972) 2297.
6) V. L. Ginzburg and L. D. Landau, Zh. Exper. Theor. Fiz. **20** (1950) 1064.
7) M. Archivald et al., Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 1156.
8) H. J. Mikeska, Phys. Rev. **179** (1969) 166.
9) J. S. Langer and J. D. Reppy, Progress in Low Temperature Physics vol. IV.
10) A. Onuki, submitted to Jour. Phys. C.