

F. Shibata and N. Hashitsume: J. Phys. Soc. Jpn. 44 (1978) 1435.

後半の話は

T. Arimitsu and F. Shibata: J. Phys. Soc. Jpn., to be published.

Microscopic Theory of Laser Master Equation up to the Forth Order

筑波大・物理 富永哲雄・有光敏彦

1. Introduction

レーザー系のマスター方程式 (Fokker-Planck 方程式) の導出の仕方には, Risken の semiclassical theory,¹⁾ Haake の microscopic theory²⁾ がある。レーザーのモデルは, 2準位原子 N 個の系と 1モード光子系が双極子相互作用しているというもので, Risken は, 光子系を古典的に, 原子系を量子論的に扱い, 熱浴による dumping の効果, 原子系を pump している効果, 光子系を古典的に扱ったために現れなかった fluctuation の効果を現象論的に入れてマスター方程式を導出した。Haake は, 光子系, 原子系ともに量子論的に扱い, 熱浴 (pumping も含む) も最初から考慮して, time-convolution (TC) 形式の減衰理論³⁾ を用いて, 光子系と原子系の相互作用に関して 4次までの範囲でマスター方程式を導出した。

$$\dot{\rho}(t) = \hat{A}_F \rho(t) + \int_0^t dt' \hat{K}^{TC}(t') \rho(t-t')$$

Haake は, 長時間極限におけるこの方程式は, Boson Coherent 表示で,

$$\dot{f}(t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta^*} \beta^* + \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \right) (\kappa - \alpha_1 + \alpha_{nl} \beta^* \beta) + 4q \frac{\partial^2}{\partial \beta^* \partial \beta} \right] f(t)$$

となり Risken の Fokker-Planck 方程式に一致すると主張したが, そこには問題点が 1つある。それは, Haake 自身指摘している通り, Haake が落とした項の中に order estimate では落とせない物理的でない項が含まれているということである。このことは, TC形式の減衰理論で得られた convolution 型の方程式について, convolution 積分のところを正しく扱わないで, naive に長時間極限をとると正しい結果が得られないことを示している。

我々は, Haake と同じモデルで time-convolution-less (TCL) 形式の減衰理論³⁾ を

用いて光子系と原子系の相互作用に関して4次まで計算した。その結果、すべての時間領域で正しい振舞を与え、長時間極限で Risken の Fokker-Planck 方程式に一致する、一般化された Fokker-Planck 方程式が得られた⁴⁾

2. Model and Formulation

モデルハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ H_0 &= H_L + H_A + g_{AL} H_{AL} + H_R, \quad H_1 = H_{LR} + H_{AR} \\ H_L &= \omega_L b^\dagger b, \quad H_A = \omega_A \sum_\mu S_\mu^z + \frac{1}{2} \omega_A N, \quad g_{AL} H_{AL} = g_{AL} \sum_\mu (S_\mu^+ b + S_\mu^- b^\dagger) \\ H_{LR} &= g_L (b R_L^+ + b^\dagger R_L^-), \quad H_{AR} = g_A \sum_\mu (R_A^- S_\mu^+ + R_A^+ S_\mu^- + R_A^z S_\mu^z) \end{aligned}$$

Liouville 方程式

$$\frac{d}{dt} W(t) = -i H^\times W(t)$$

Conventional な方法で熱浴の情報を消去し、さらに、resonant case ($\tilde{\omega}_A = \tilde{\omega}_L = \omega$, $\tilde{\omega}$ は熱浴によるシフトを受けた振動数), 原子系の緩和時間は光子系のそれに比べて短かいという事実を使って、原子系の情報を TCL 形式の減衰理論で消去した。

$$\dot{\bar{\rho}}_L(t) = \hat{A}_L \bar{\rho}_L(t) + \hat{K}^{\text{TCL}}(t) \bar{\rho}_L(t) \quad (1)$$

ここで

$$\hat{K}^{\text{TCL}}(t) \bar{\rho}_L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i g_{AL})^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \langle \hat{H}_{AL}^\times(t) \cdots \hat{H}_{AL}^\times(t_{n-1}) \rangle_{\text{O.C.}} \bar{\rho}_L(t)$$

であり、対応する TC 形式の表式は、

$$\int_0^t dt' K^{\text{TC}}(t') \rho(t-t') = \sum_{n=1}^{\infty} (-i g_{AL})^n \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \langle \hat{H}'_{AL}(t) \cdots \hat{H}_{AL}^\times(t_{n-1}) \rangle_{\text{P.C.}} \rho(t_{n-1})$$

である。 $\langle \cdots \rangle_{\text{O.C.}}$ は ordered cumulant (O.C.), $\langle \cdots \rangle_{\text{P.C.}}$ は partial cumulant (P.C.)³⁾ を表わす。O.C., P.C. の違いは3次以上で現われ、このレーザーモデルでは、4次の項で現われる。O.C. はオペレーター性を無視すると、普通のキュムラントに一致するが、P.C. は一致しない。そのために P.C. では4次の項の中に N^2 (N は原子数) に比例する項が残ってしまい、この項のために、convolution 積分を止めて長時間極限をとる操作がで

好村滋洋

きなくなる。O.C. では、光子系のオペレーター性のために N^2 の項がすべてキャンセルしてしまうことはないが、その項は、長時間極限において2次の項の g_{AL}^2 にくり込まれる形をしている。

(1)式を Boson Coherent 表示で表わし、Order estimate により余分な項を省略すると、

$$\dot{f}(t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta^*} \beta^* + \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \right) (\kappa - \tilde{\alpha}_1(t) + \alpha_{n1}(t) \beta^* \beta) + \tilde{q}(t) \frac{\partial^2}{\partial \beta^* \partial \beta} \right] f(t)$$

となる。さらに、長時間極限をとると、

$$\dot{f}(t) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \beta^*} \beta^* + \frac{\partial}{\partial \beta} \beta \right) (\kappa - \tilde{\alpha}_1 + \alpha_{n1} \beta^* \beta) + \tilde{q} \frac{\partial^2}{\partial \beta^* \partial \beta} \right] f(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\alpha}_1 = \frac{N g_{AL}^2 \sigma_0}{r_{\perp}} \left(1 - \frac{N g_{AL}^2 \sigma_0}{r_{\perp}^2} \right) \\ \tilde{q} = \frac{N g_{AL}^2 (H \sigma_0)}{r_{\perp}} \left(1 - \frac{N g_{AL}^2 \sigma_0}{r_{\perp}^2} \right) \\ \alpha_{n1} = \frac{4 N g_{AL}^4 \sigma_0}{r_{\perp}^2 r_{\parallel}} \end{array} \right.$$

となる。 $\tilde{\alpha}_1$, \tilde{q} の第2項が光子系のオペレーター性による量子論的補正である。

4次の項の計算は非常に複雑であるが、鏡映演算子を用いたダイアグラム法⁵⁾を使うと見通し良く計算できる。

3. references

- 1) H. Risken; "Progress in Optics" Vol. VIII, pp. 239-294.
- 2) F. Haake; Z. Physik, 227, (1969) 179.
- 3) F. Shibata and T. Arimitsu; J. Phys. Soc. Jpn. 49, (1980) 891.
- 4) T. Arimitsu and T. Tominaga; J. Phys. Soc. Jpn. 51, (1982) No. 10.
- 5) T. Arimitsu; J. Phys. Soc. Jpn. 51, (1982) 1720.

A1-Zn合金等の相分離過程

広島大学総合科学部 好村 滋洋

二元系合金における相分離過程の研究は、実用上重要であるばかりでなく、Cahn¹⁾ の「ス