レーザーのミクロ理論

筑波大・物理　有 光 敏 彦
お茶の水大・理　柴 田 文 明

レーザーを記述するにもいろいろなレベルがあるわけだが，非平衡の統計力学という視点からはミクロ理論が興味深い。「揺らぎ」が果たす役割が大きいのだが現象論で扱かう限りは何のゆらぎだか分らなくなってしまうからである。

ゆらぎと言えばランジュバン方程式ということになるので，まずこれを見ることとしよう。通常の理論によれば光子の生成演算子 b^+ に対して

$$\dot{b}^+(t) = (\mathrm{i}\,\omega_0 - \kappa)\, b^+(t) + \mathrm{i}\sum_\mu g_\mu S_\mu^+(t) + G_{b^+}(t) \tag{1}$$

という式を書く。S_μ は μ 番目の二準位原子をスピン演算子であらわしたものであり，$G(t)$ はランダムな力である。この $G(t)$ に対しては

$$\langle G_{b^+}(t_1)\, G_b(t_2)\rangle = \gamma\,\bar{n}\,\delta(t_1 - t_2) \tag{2}$$

$$\langle G_b(t_1)\, G_{b^+}(t_2)\rangle = \gamma(\bar{n}+1)\,\delta(t_1 - t_2) \tag{3}$$

とやると，うまく光子数の平衡値を与えてくれるのでよいように思える。ところが揺動散逸定理と矛盾してしまう (Kubo's objection). 言いかえると量子系のランジュバン方程式に対しては〝白い〟ランダム力という仮定はダメなのである。

物質系 (二準位原子の集合) に対しても同じようにしてランジュバン方程式をたてるのだが，実は多くのレーザーの論文やら本やらが出ているがこれらの基本方程式をキチンと導出したものはないのである。たとえば

$$\dot{S}_\mu^z(t) = \frac{1}{T_1}\{S_\mu^0 - S_\mu^z(t)\} + i\,[\,g_\mu^* b^+(t) S_\mu^-(t) - g_\mu b(t) S_\mu^+(t)] + \Gamma_\mu(t) \tag{4}$$

というような式が書いてあるが，S_μ^0 という定常値を導くのは容易なことでない。実はこの事は当然であってスピンのブラウン運動における friction の項という難問と関係している。したがってこの視点からのみ正しい式に到達できるのである。ランダム力 $\Gamma_\mu(t)$ に関しての困難は前述の通りである。

通常の方法では S と b^+ の式から断熱消去と称して S を消し b^+ のみの方程式としてしまう。結論的には b^+ はTDGL にランダムな力が加わった式となる。これから２次相転移との類比で話を進める，というのがランジュバン方程式によるレーザー理論の大筋である。

けれども基本方程式の導出及び断熱消去のプロセスでいいかげんなことあいまいなことが余りにも多過ぎる。基本方程式の導出に関しては我々がスピンのブラウン運動で行ったようにやるか，あるいはまだ誰も行っていないので，どなたかがやってみると面白いと思うのだが，Mori の方法を K. Kawasaki がモード結合理論で拡張して用いたようにして行なえるのではないか。

いずれにしてもレーザー理論における量子論的なランジュバン方程式の方法というものはあまり感心したものではない。

そこで以下では最近の我々の仕事の概略をお話しよう。全体系は電磁場とその減衰機構，物質系とそれに対する減衰及びポンピングの機構からなる。全系の密度行列から減衰機構の自由度に関してはトレースをとってしまう。このときの密度行列を$W_S(t)$と書くと

$$\dot{W}_S(t) = [-i\mathscr{H}_S^{\times} + \Pi(t)]W_S(t) \tag{5}$$

となる。$\Pi(t)$が減衰をになう。(5)は演算子の式であっていかにも扱かいにくい。そこでｃ数の空間に移行し，準分布関数を電磁場に関してはエルミト関数，物質系に関しては球面調和関数で展開する。すると(5)は展開係数に対する発展方程式となってしまう。そのような微分方程式は数値計算で解けてしまうし，物理量の平均値は展開係数で書けているので問題は殆ど近似なしに片付いてしまう。電磁場と物質系間の相互作用が強いときも，またレーザーの極限から超放射の極限まで調べることができる。さらには電磁場を媒介として原子の分極がどのように協同して揃って行くのか，というような興味深い問題も調べることができるのである。こうすればレーザー理論のあいまいさは全くなくなるし，さまざまな局面を検討することができるのである。

通常のやり方はたとえば下記の本参照：

H. Haken : *Handbuch der Physik,* XXV 12C, L. Genzel (ed.) (Springer-Verlag, 1970)

W. H. Louisell : *Quantum Statistical Properties of Radiation,* (John-Wiley, 1973)

M. Sargent, M. O. Scully and W. E. Lamb, JR. : レーザー物理，霜田光一・岩沢宏・神谷武志訳 (丸善， 1978. 原著 1974) .

ランダムな〝白い力〟については

R. Kubo: J. Phys. Soc. Jpn. **26** Suppl. (1969) 1.

量子スピンのブラウン運動：

冨永哲雄・有光敏彦

F. Shibata and N. Hashitsume: J. Phys. Soc. Jpn. **44** (1978) 1435.

後半の話は

T. Arimitsu and F. Shibata: J. Phys. Soc. Japn., to be published.

Microscopic Theory of Laser Master Equation up to the Forth Order

筑波大・物理　　冨永哲雄・有光敏彦

1. Introduction

レーザー系のマスター方程式（Fokker-Planck 方程式）の導出の仕方には，Risken の semiclassical theory,[1] Haake の microscopic theory[2] がある。レーザーのモデルは，２準位原子N個の系と１モード光子系が双極子相互作用しているというもので，Risken は，光子系を古典的に，原子系を量子論的に扱い，熱浴による dumping の効果，原子系を pump している効果，光子系を古典的に扱ったために現れなかった fluctuation の効果を現象論的に入れてマスター方程式を導出した。Haake は，光子系，原子系ともに量子論的に扱い，熱浴（pumping も含む）も最初から考慮して，time-convolution（TC）形式の減衰理論[3] を用いて，光子系と原子系の相互作用に関して４次までの範囲でマスター方程式を導出した。

$$\dot{\rho}(t)=\hat{\Lambda}_{\mathrm{F}}\,\rho(t)+\int_0^t dt'\,\hat{K}^{\mathrm{TC}}(t')\,\rho(t-t')$$

Haake は，長時間極限におけるこの方程式は，Boson Coherent 表示で，

$$\dot{f}(t)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\beta^*}\beta^*+\frac{\partial}{\partial\beta}\beta\right)(\kappa-\alpha_{\mathrm{l}}+\alpha_{\mathrm{nl}}\beta^*\beta)+4q\frac{\partial^2}{\partial\beta^*\partial\beta}\right]f(t)$$

となり Risken の Fokker-Planck 方程式に一致すると主張したが，そこには問題点が１つある。それは，Haake 自身指摘している通り，Haake が落とした項の中に order estimate では落とせない物理的でない項が含まれているということである。このことは，TC形式の減衰理論で得られた convolution 型の方程式について，convolution 積分のところを正しく扱わないで，naive に長時間極限をとると正しい結果が得られないということを示している。

我々は，Haake と同じモデルで time-convolution-less（TCL）形式の減衰理論[3] を