

## 質量を保存する Volterra 系

名工大・物理 森 次 雄

(1982年10月30日受理)

## 要旨

保存量  $X_1 + X_2 + X_3$  を持つ Volterra 系

$$dX_1/dt = X_3 X_1 - X_1 X_2$$

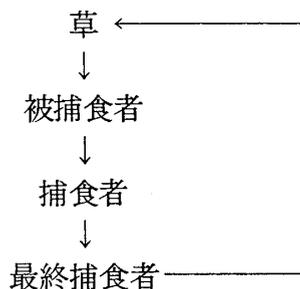
$$dX_2/dt = X_1 X_2 - X_2 X_3$$

$$dX_3/dt = X_2 X_3 - X_3 X_1$$

の解を幾何学的及び解析的に調べ、点  $(X_1, X_2, X_3)$  がある三角形の中の閉曲線を描くこと、及び人口  $X_\mu(t)$  が Pe 関数の有理式であることを見出した。又  $X_\mu$  が定常解を遠巻きにする程その周期は長くなることが判った。 $n$ 成分の系  $X_1, X_2, \dots, X_n$  については、線形近似の範囲内で考察した。

## § 1 序論

捕食者と被捕食者から成る Volterra 系は一般に解放系として扱われている。しかし草食動物の飼料である草も併せて考えれば生態系の質量は保存されている筈であり、更に地球は全体として閉じた生態系と考えられる。そこで本稿では質量を保存する最も簡単な Volterra系を考察する。被捕食者である草食動物は草を食べて繁殖し、草は動物の死体が分解されて生じた肥料を吸収して繁殖する。これを単に「草が最終捕食者を食べる」と図式化する。すると次の様な連鎖が得られる。



森 次雄

このような連鎖を巡回的 Feedback 系と名付けることにする。このような Volterra 系の各成分の人口の時間的変動を調べるのが本稿の目的である。特に 3 成分から成り質量を保存する Volterra 系を詳しく調べることにする。

## § 2 基礎方程式

同一地域内の  $n$  種族の各々の人口 ( Population size ) をそれぞれ

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

とし、これらは時間  $t$  の関数とする。2 種族間の競合を表す Volterra 方程式<sup>1,2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= aX_1 - bX_1X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= -cX_2 + dX_1X_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

では和  $X_1 + X_2$  は保存されない。その主な原因は Malthus 項 ( 1 次項 ) の存在である。もし

$$a = c = 0, \quad b = d$$

ならば  $X_1 + X_2$  は保存量となる。例えば

$$\frac{dX_1}{dt} = -X_1X_2, \quad \frac{dX_2}{dt} = X_1X_2 \quad (2)$$

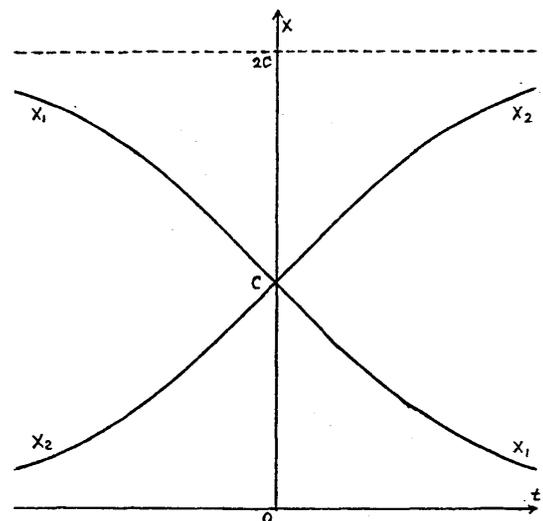
を考えれば、 $t = 0$  に於て両種族が等量存在する解は

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{2C}{1 + \exp(2Ct)} \\ X_2 &= \frac{2C \exp(2Ct)}{1 + \exp(2Ct)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(  $C = \text{constant}$  )

で与えられる。この場合、 $X_1 + X_2$  は保存されるが  $t \rightarrow \infty$  に於て餌食  $X_1$  が絶滅し、人口の周期的変動は得られない ( 第 1 図 )。周期的変動が行なわれるためには

$$n \geq 3$$



第 1 図 質量を保存する 2 種族間の競合

が必要である。

Malthus 項を欠く方程式(2)を  $n = 3$  の場合に拡張すれば

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{dX_1}{dt} &= a_2 X_3 X_1 - a_3 X_1 X_2 \\ m_2 \frac{dX_2}{dt} &= a_3 X_1 X_2 - a_1 X_2 X_3 \\ m_3 \frac{dX_3}{dt} &= a_1 X_2 X_3 - a_2 X_3 X_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となり、この Volterra 系は全質量  $\sum m_\mu X_\mu$  を保存する。ただし  $m_\mu$  は第  $\mu$  種族の個体質量である。この方程式は後節で詳細に論ずるが、その特徴の一つは定常解（渦心点）

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} = \frac{X_3}{a_3} \quad (5)$$

を有することである。尺度変換

$$X_\mu \rightarrow a_\mu X_\mu, \quad m_\mu \rightarrow m_\mu a_{\mu+1} a_{\mu+2} \quad (a_{\mu+3} = a_\mu)$$

を行えば(4)は

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{dX_1}{dt} &= X_3 X_1 - X_1 X_2 \\ m_2 \frac{dX_2}{dt} &= X_1 X_2 - X_2 X_3 \\ m_3 \frac{dX_3}{dt} &= X_2 X_3 - X_3 X_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

に帰する。方程式(4)を  $n$  種族の系に拡張した

$$m_\mu \frac{dX_\mu}{dt} = a_{\mu-1} X_{\mu-1} X_\mu - a_\mu X_\mu X_{\mu+1} \quad (7)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, n; a_n = a_0, X_{\mu+n} = X_\mu)$$

は取扱い困難で、(5)に相当する定常解も一般的には存在しない。そこで  $n$  種族の系に関しては(6)の拡張である

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{dX_1}{dt} &= X_n X_1 - X_1 X_2 \\ m_2 \frac{dX_2}{dt} &= X_1 X_2 - X_2 X_3 \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \frac{dX_n}{dt} &= X_{n-1} X_n - X_n X_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

森 次雄

に限定することにする。 $n$ を無限大と考えればこの方程式の表す力学系は広田・薩摩<sup>3)</sup>の考えた電気回路と同等である。彼等はその様な系を戸田格子方程式で近似し、その Soliton 解を論じた。又成田<sup>4)</sup>は相互作用項  $X_\mu X_{\mu+1}$  のより一般的な形を提案し、 $n$ を無限大としたが、彼の目標も Soliton 解にあった。しかし生態系では Soliton 的状态は考え難い。それは人口がある1種族に集中し他種族が殆んど死滅すること、及びその様な人口集中が次の種族へ伝播することを意味するからである。生態系に対しては(8)の線形近似から得られる正弦関数解、及びそれを極限として含む厳密解が適当である。ただし厳密解は本稿に於て  $n=3$  の場合にのみ得られている。

3種族の系の定性的振舞を知るためには

$$m_1 = m_2 = m_3$$

の場合を考えれば充分であるから、以下の節では(6)の代りに

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X_3 X_1 - X_1 X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= X_1 X_2 - X_2 X_3 \\ \frac{dX_3}{dt} &= X_2 X_3 - X_3 X_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を考えることにする。

### § 3 線形近似

3種族の系に対する微分方程式(9)を考える。この力学系は

$$X_1 = X_2 = X_3 = C$$

なる渦心点を有する。ただし  $C$  はある定数である。 $h_\mu$  を微小量とし、渦心点から少し外れた解を

$$X_\mu = C(1 + h_\mu), \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (10)$$

ただし

$$\sum_\mu h_\mu = 0 \quad (11)$$

とおいて(9)を線形化すれば

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる。ただし

$$\mathbf{A} = C \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

マトリクス  $\mathbf{A}$  の固有値は

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{3}C, \quad \lambda_3 = i\sqrt{3}C \quad (14)$$

と求められ、固有ベクトルは次のマトリクスの列で与えられる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

従って(12)の解は

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 0 \\ C_2 \exp(-i\sqrt{3}Ct) \\ C_3 \exp(i\sqrt{3}Ct) \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる。第1積分定数は条件(11)により

$$C_1 = 0$$

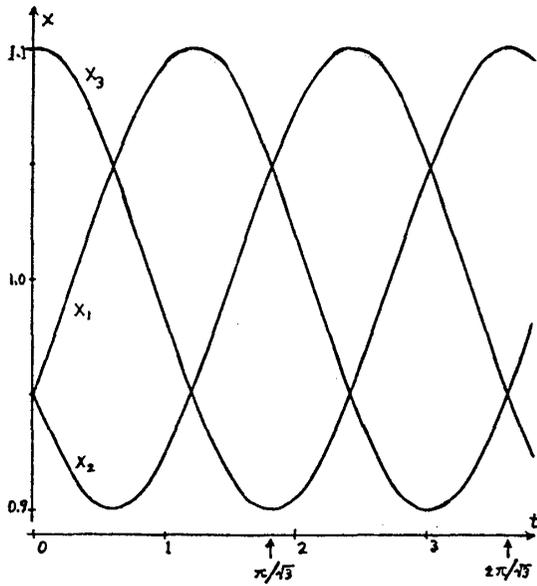
とおいた。他の積分定数  $C_2$  と  $C_3$  を共役複素数にとり

$$C_2 = C_3^* = -\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon \exp(-i\delta)$$

と選べば実数解

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \varepsilon \cos(\sqrt{3}Ct + 4\pi/3 + \delta) \\ h_2 &= \varepsilon \cos(\sqrt{3}Ct + 2\pi/3 + \delta) \\ h_3 &= \varepsilon \cos(\sqrt{3}Ct + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を得る。この場合人口  $X_1, X_2, X_3$  の変化は第2図の様になる。



第2図 3種族の系における線形近似  
( $C=1, \delta=0, \varepsilon=0.1$ )

一般に  $n$  種族の系

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= X_n X_1 - X_1 X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} &= X_1 X_2 - X_2 X_3 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dX_n}{dt} &= X_{n-1} X_n - X_n X_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

についての線形近似は

$$\frac{dh_\mu}{dt} = C(h_{\mu-1} - h_{\mu+1}) \quad (19)$$

$$(h_{\mu+n} = h_\mu, \sum h_\mu = 0)$$

となる。3種族系の場合と同様の記号を用いると、マトリクス  $A$  の固有値は

$$\lambda_\nu = -2iC \sin \frac{2(\nu-1)\pi}{n} \quad (20)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n)$$

となる。  $U$  の要素は

$$U_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left\{i \frac{2\mu(\nu-1)}{n} \pi\right\} \quad (21)$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

で与えられる。方程式(19)の実数解は

$$\left. \begin{aligned} h_\mu &= \sum_{\nu=1}^n C_\nu U_{\mu\nu} \exp(\lambda_\nu t) \\ C_1 &= 0 \\ C_{n/2+1} &= 0 \quad (\text{If } n \text{ is even.}) \\ C_{n-\nu+2} &= C_\nu^* = -\frac{\sqrt{n}}{2} \varepsilon_\nu \exp(i\delta_\nu) \\ (* : \text{Complex conjugate}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

から求められる。即ち

$$h_\mu = \sum_{\nu=2}^{\nu'} \varepsilon_\nu \cos \left\{ 2Ct \sin \frac{2(\nu-1)\pi}{n} - \frac{2(\nu-1)\mu}{n} \pi + \delta_\nu \right\} \quad (23)$$

$$\text{where } \nu' = \left[ \frac{n-1}{2} \right] + 1 \quad ( [\dots] : \text{Gauss integer} ) \quad \Bigg|$$

例えば  $n = 5$  の場合は  $\nu' = 3$  で、次の2つの周期  $\tau_2, \tau_3$  が混ることになる。

$$n = 5 : \tau_2 = \frac{\pi}{C \sin(2\pi/5)}, \quad \tau_3 = \frac{\pi}{C \sin(4\pi/5)}$$

周期  $\tau_2$  を持つモードは弦の基本振動に相当する。  $C_1 = 0$  とおいているため、  $\nu$  の値は2から始まる。

#### § 4 3種族の系に対する幾何学的考察

方程式(6)は次の2つの積分を持つ。

$$\frac{m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3}{m_1 + m_2 + m_3} = C \tag{24}$$

及び

$$X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3} = k C^{m_1 + m_2 + m_3} \tag{25}$$

但し  $C$  及び  $k$  は積分定数である。以下

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

なる系、即ち(9)を考えることにする。この力学系は尺度変換

$$X_\mu \rightarrow C X_\mu, \quad t \rightarrow t/C \tag{26}$$

によって不変であり、一般性を失うことなく

$$C = 1$$

とおくことが出来る。よって以下(24), (25)をそれぞれ

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3 \tag{27}$$

及び

$$X_1 X_2 X_3 = k \tag{28}$$

でおき代える。方程式(27)はデカルト座標系  $O-X_1 X_2 X_3$  における平面を表す。この平面が座標

森 次雄

軸を切る点をA, B, Cとする(第3図)。渦心点G(1, 1, 1)は平面ABC上にあり, 点A, B, Cにそれぞれ質量  $m_1, m_2, m_3$  を置いた時の重心に一致する。積分曲面(28)は4個の分枝を持ち, その1つが第3図に破線で示されている。この図中実線で示される曲線は積分曲線(28)と平面ABCとの交線で, これらの曲線が方程式(9)の解を表す。生態系では変数  $X_1, X_2, X_3$  はすべて正であるから, 三角形ABC内の閉曲線だけが意味を持っている。かくして質量を保存する Volterra系の振舞は或る平面上で重心を取巻く閉曲線で表される。この閉曲線上の点の運動を  $X_1, X_2, X_3$  軸上に射影すれば人口の時間的変動が得られる。この方法のもう1つの利点は方程式(9)を数値積分する際, 変数の数を減らし得ることである。

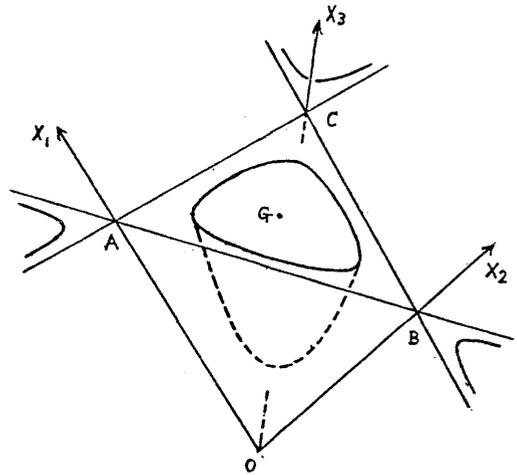
平面ABC上にデカルト座標系A-XYをと, X軸を直線ABに一致させる(第4図)。Z軸はA点を通り平面ABCに垂直である。O- $X_1 X_2 X_3$ 系とA-XYZ系との変換は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} X_1 - 3 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{29}$$

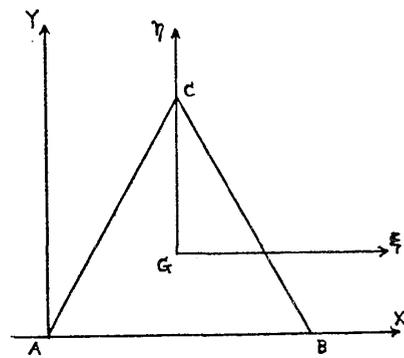
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{30}$$

点  $(X_1, X_2, X_3)$  の運動は平面ABC上で行われるから常に

$$Z = 0$$



第3図 平面ABC上の Volterra 系の振舞はG点を取巻く閉曲線で表される。



第4図 平面ABC上の座標系A-XY及びG-ξη

である。渦心点 G を原点とする座標系 G- $\xi\eta$  をとり

$$\left. \begin{aligned} X &= \xi + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ Y &= \eta + \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

とおけば方程式(9)は次の様に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^2 - \sqrt{6}\eta - \xi^2) \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi(\sqrt{2}\eta + \sqrt{3}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

渦心点近傍では

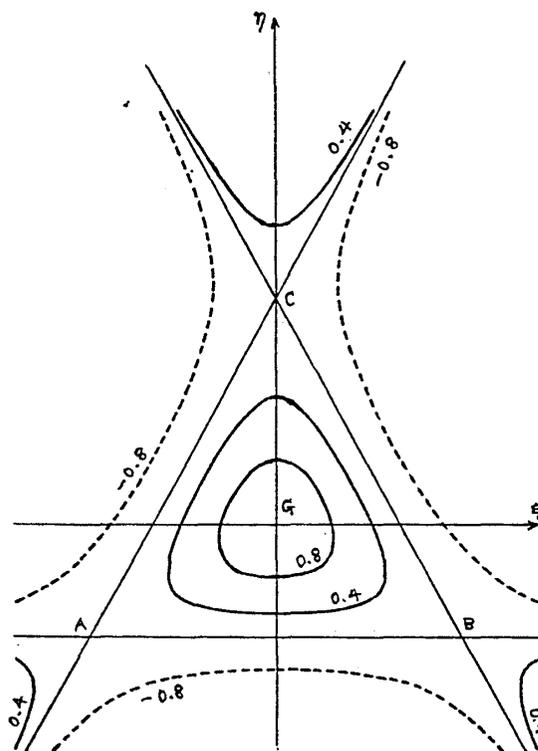
$$\frac{d\xi}{dt} = -\sqrt{3}\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{3}\xi \quad (33)$$

となり、 $\xi, \eta$  を  $X_1, X_2, X_3$  軸に射影すれば正弦曲線(17)を得る。(33)式に従う  $\xi-\eta$  曲線は渦心点を中心とする平面 ABC 上の円である。

次に渦心点から離れた状態を考える。(27)及び(28)に座標変換(29)~(31)を施せば  $\xi$  と  $\eta$  との関係が得られる。結果は次の 3 次方程式である。

$$\begin{aligned} \eta^3 - \sqrt{\frac{27}{2}}\eta^2 - 3\xi^2\eta + \sqrt{\frac{27}{2}}(2 - \xi^2) \\ - 3\sqrt{6}k = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

これより得られる  $\xi-\eta$  曲線を第 5 図に示す。この図に於て実線は  $k > 0$ 、破線は  $k < 0$  なる場合を示している。三角形 ABC 内の閉曲線が生態系の振舞を示す。微分方程式(32)を Runge-Kutta 法で数値積分すれば、 $\xi-\eta$  曲線を一周する時間、即ち周期  $\tau$  が得られる。数値積分を行う時の初期値は(34)式を通じてパラメータ  $k$  に関係しているため、周期  $\tau$  は  $k$  の関数である。Runge-Kutta 法により得られた  $\tau$  と  $k$  の関



第 5 図  $\xi-\eta$  曲線。図中の数字は  $k$  の値を示す。

森 次雄

係を第6図に示す。この図及び(17)より

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} \tau &= \infty, \\ \lim_{k \rightarrow 1^-} \tau &= 2\pi/\sqrt{3} \end{aligned} \quad (35)$$

となる、 $\tau(k)$ は  $0 < k \leq 1$  で単調減少関数である。人口  $X_1, X_2, X_3$  の変動が小さい時、点  $(\xi, \eta)$  は G 点を囲む小さい円周上を周期  $2\pi/\sqrt{3}$  で一周する。人口の変動が大きい時、点  $(\xi, \eta)$  の軌道は三角形の辺の近くを通る閉曲線となり、周期は長くなる。即ち人口が極度に減少するとその回復に長い時間がかかる。特別の場合として点  $(\xi, \eta)$  が直線 AB に沿って A 点から B 点に至るには無限大の時間を要する。このことは 2 種族系の方程式(2)によっても示されたところである。(32)の数値積分から得られた  $\xi(t), \eta(t)$  を(29)~(31)によって変換すれば  $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$  が求まる。例として

$$k = 0.8, \quad \xi(0) = 0, \quad \eta(0) = 0.70335$$

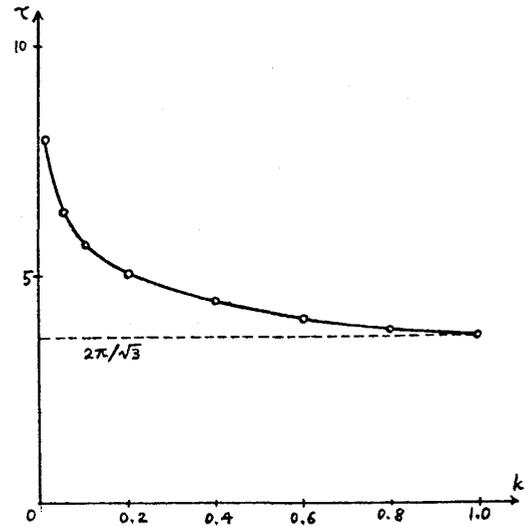
とおいた場合の結果を第7図に示す。これは第2図の正弦曲線を少し歪ませた形をしている。

$n$  種族の系(18), 即ち

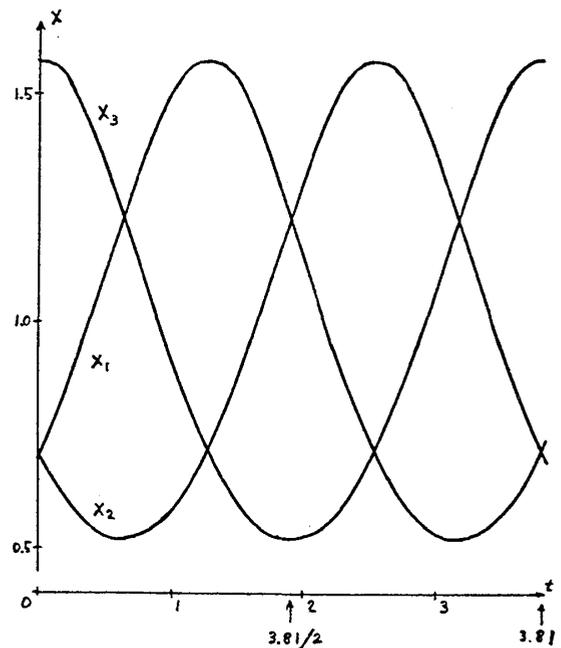
$$\begin{aligned} \frac{dX_\mu}{dt} &= X_{\mu-1} X_\mu - X_\mu X_{\mu+1} \quad (36) \\ (X_{\mu+n} &= X_\mu) \end{aligned}$$

についても積分平面

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = n \quad (37)$$



第6図 周期  $\tau$  とパラメタ  $k$  との関係



第7図  $X_1, X_2, X_3$  の時間的変動。パラメタ  $k = 0.8$ , 周期  $\tau = 3.81$

が存在する。点  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  は  $n$  次元空間内の超平面(37)上を運動し、その軌道は重心  $G(1, 1, \dots, 1)$  を囲む閉曲線となる。

### § 5 3 種族の系に対する厳密解 $X(t)$

微分方程式(9)は2つの積分(27), (28)を持っている。この両式より  $X_2$  及び  $X_3$  を  $X_1$  の式で表すことが出来る。即ち

$$\left. \frac{X_3}{X_2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 3 - X_1 \pm \sqrt{(3 - X_1)^2 - 4k/X_1} \right\} \quad (38)$$

これを(9)の第1方程式に代入すれば  $X_1$  に対する微分方程式を得る。 $X_2, X_3$  に対する微分方程式も同型となる。即ち

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{f(X)}, \quad X = X_1, X_2, X_3 \quad (39)$$

と書くことが出来る。但し  $f(X)$  は

$$\begin{aligned} f(X) &= X(X^3 - 6X^2 + 9X - 4k) \\ &= (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4) \\ &\quad (\alpha_1 = 0) \end{aligned} \quad (40)$$

で与えられる。ここに  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  は  $f(X) = 0$  の4根を表す。(39)は

$$\frac{dX}{dt} = \pm \sqrt{f(X)}$$

と書くべきであるが、負号の場合の取扱いは(39)と同等であるので、ここでは(39)を考えることにする。 $f(X) = 0$  の4根の1つを単に  $\alpha$  と書けば

$$\int_{\alpha}^X \frac{dX}{\sqrt{f(X)}} = t \quad (41)$$

標準的方法<sup>5)</sup>, 即ち

$$X = \alpha + \frac{A_3}{P(t; g_2, g_3) - A_2/2} \quad (42)$$

なる変換により、積分(41)は次のものに帰着する。

$$t = \int_P^{\infty} \frac{dP}{\sqrt{4P^3 - g_2P - g_3}} \quad (43)$$

森 次雄

ここに  $P$  は Weierstrass の楕円関数 (Pe 関数) で、各パラメタは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \alpha^2 - 3\alpha + \frac{3}{2} \\ A_3 &= \alpha^3 - \frac{9}{2}\alpha^2 + \frac{9}{2}\alpha - k \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

及び

$$\left. \begin{aligned} g_2 &= \frac{27}{4} - 6k \\ g_3 &= -k^2 + \frac{9}{2}k - \frac{27}{8} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

さて  $f(X) = 0$  の 4 根は  $k$  の値により次の様に変化する。

$k$	$\alpha_1$	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
$k < 0$	0	単負根及び共役複素数
$k = 0$	0	0, 3, 3
$0 < k < 1$	0	3 正根
$k = 1$	0	1, 1, 4
$k > 1$	0	単正根及び共役複素数

第 8 図はこの様子を模式的に示している。第 5 図に実線で示した閉曲線を得るためには  $f(X) = 0$  の根が 0 及び 3 個の異なる正数でなければならないから

$$0 < k < 1 \quad (46)$$

なる  $k$  を選ぶべきである。この場合

$$\alpha_1 = 0, \quad 0 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$$

とおく。  $f(X) \geq 0$  でなければならないから、

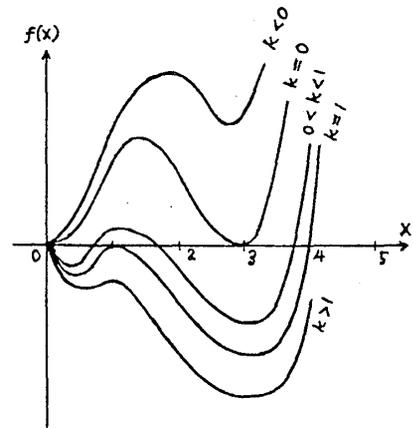
$X$  の変域は

$$\alpha_2 \leq X \leq \alpha_3 \quad (47)$$

である (第 9 図)。不等式  $f(X) \geq 0$  の解は

(47) の他に

$$X \leq 0 \quad \text{及び} \quad \alpha_4 \leq X$$



第 8 図  $k$  の値と  $f(X) = 0$  の 4 根との関係

質量を保存する Volterra 系

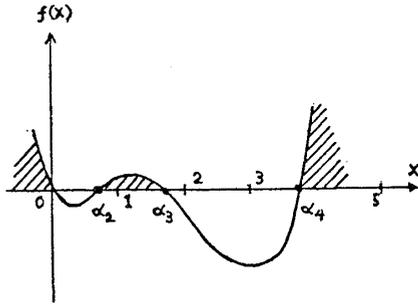
があるが、第5図の三角形 ABC 内の閉曲線に対応するのは(47)である。Pe関数の定義(43)における3次式の零点を

$$p_1 < p_2 < p_3 \quad (48)^*)$$

とすると

$$\begin{aligned} 4P^3 - g_2P - g_3 \\ = 4(P-p_1)(P-p_2)(P-p_3) \end{aligned} \quad (49)$$

第9図  $f(X) \geq 0$ なるX変域(斜線部)。Xは変域( $\alpha_2 \leq X \leq \alpha_3$ )で周期的に変動する。



このとき周期を  $\tau$  として次表の対応が成立つ。

$t$	$X$	$P$
0	$\alpha_2$	$\infty$
$\tau/2$	$\alpha_3$	$P_3$

従って

$$p_3 = \frac{A_3}{\alpha_3 - \alpha_2} + \frac{A_2}{2} \quad (50)$$

(41)~(44)には

$$\alpha = \alpha_2 \quad (51)$$

を代入すべきであり、周期  $\tau$  は次式で与えられる。

$$\tau = 2 \int_{P_3}^{\infty} \frac{dP}{\sqrt{4P^3 - g_2P - g_3}} \quad (52)^{**})$$

この様な方法は対称コマの議論と似ている。

例として  $k = 0.8$  の場合を考えれば、各パラメタの値は

$$k = 0.8 : \left. \begin{array}{l} g_2 = 1.95 \\ g_3 = -0.415 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A_2 = 0.2094161 \\ A_3 = 0.4641242 \end{array} \right\}$$

\*) 一般に用いられる記号 (Ref. 5 その他) は  $e_3 < e_2 < e_1$  である。

\*\*\*) 一般的には  $\omega = \tau/2$  なる  $\omega$  が用いられる。

森 次雄

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_2 = 0.5205021 \\ \alpha_3 = 1.5742815 \\ \alpha_4 = 3.9052164 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} p_1 = -0.7869775 \\ p_2 = 0.2418317 \\ p_3 = 0.5451458 \end{array} \right\}$$

積分(43)又は(52)の被積分関数は  $P = p_3$  に於て分母が0となり、そこでは Simpson 公式が使えない。故に被積分関数を Taylor 展開してその精度を調べ、積分(52)の数値計算を次の3区間に分けて行った。

$3 \leq P < \infty$  :  $P \rightarrow \infty$ における Taylor 展開を項別積分。

$0.56 \leq P \leq 3$  : Simpson (1/3) 公式による積分。

$p_3 \leq P \leq 0.56$  :  $P = p_3$  における Taylor 展開を項別積分。

この方法で周期  $\tau$  として次の値を得た。

$$k = 0.8 : \tau = 3.8097$$

この値は Runge-Kutta 法による周期 (第6図) と一致する。(43)式の数値積分による  $P(t)$  及び(42)式で与えられる  $X(t)$  を第10図に示す。

この図の  $X(t)$  の形状は Runge-Kutta 法によるもの (第7図) を再現している。 $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  の違いは(43)の左辺を

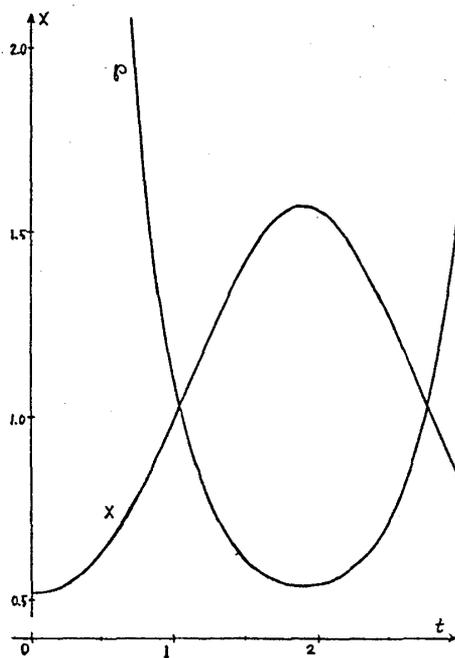
$$t + \text{Constant}$$

と読む時の Constant による。この Constant を順次  $\tau/3$  ずらすことにより  $X_1, X_2, X_3$  が形成される。即ち

$$\left. \begin{array}{l} X_1(t - \tau/3) = X_2(t) \\ X_1(t - 2\tau/3) = X_3(t) \\ X_1(t - \tau) = X_1(t) \end{array} \right\} \quad (53)$$

なる関係がある。そこで(9)の第1方程式

$$\frac{dX_1}{dt} = X_3 X_1 - X_1 X_2 \quad (54)$$



第10図 パラメタ値  $k = 0.8$  に対する Pe 関数  $P(t)$  及び人口変動  $X(t)$ 。

が成立つと仮定し, (53)によって書直せば

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = X_1(t-2\tau/3)X_1(t) - X_1(t)X_1(t-\tau/3)$$

となる。変数変換

$$t \rightarrow t - \tau/3 \tag{55}$$

を行えば

$$\frac{dX_1(t-\tau/3)}{dt} = X_1(t-\tau)X_1(t-\tau/3) - X_1(t-\tau/3)X_1(t-2\tau/3)$$

を得る。これは

$$\frac{dX_2}{dt} = X_1X_2 - X_2X_3 \tag{56}$$

即ち(9)の第2方程式に他ならない。かくして  $X_1, X_2, X_3$  は時間的に順次  $\tau/3$  ずれて変動することが判る。

さて(53)式の表す図式が  $n$  種族の系に拡張出来るかどうかを見るため, 線形近似解(23)を想出そう。線形近似の基本モード ( $\nu = 2$ ) に対してはこの図式は次の様に拡張される。

$$h_\mu(t-\tau_2/n) = h_{\mu+1}(t) \quad (\text{for } \nu = 2 \text{ only}) \tag{57}$$

但し  $\tau_2$  は基本周期である。しかし第1上音モード ( $\nu = 3$ ) に対してはこの図式が成立せず, 代りに

$$h_\mu(t-2\tau_3/n) = h_{\mu+1}(t) \quad (\text{for } \nu = 3 \text{ only}) \tag{58}$$

となる。従って基本及び第1上音モードが重っている場合, 各人口の時間的変動が  $\tau_2/n$  ずれるとは言えないのである。線形近似の成立たない領域では基本モードにおける正弦関数を超越関数でおき代えた1つの解が存在することは予想されるが, 詳細は不明である。

## § 6 結論

質量を保存する3種族 Volterra 系の人口  $X_1, X_2, X_3$  の変動を調べた。ある平面上に3種族を代表する点 A, B, C をとると, 点  $(X_1, X_2, X_3)$  は時間の経過と共に平面 ABC 上の閉曲線を描き, この曲線は三角形 ABC 内にあって重心を囲む。この重心は人口が変化しない定常状態を表す。各個体の質量  $m_1, m_2, m_3$  が等しい場合三角形 ABC は正三角形となり,  $X_1,$

森 次雄

$X_2, X_3$  の時間的変動は Pe 関数の有理式で表され, 各人口は周期の 3 分の 1 ずつずれて変化する。又人口変動の振幅が大きくなる程周期は長くなる。 $m_1, m_2, m_3$  が等しくない場合三角形 ABC は正三角形でなくなるが, 上の結論は定性的には変らない。本稿では単純な仮定 — 3 種族間の巡回的 Feedback (三すくみ) — をおいた。自然界は勿論これ程単純でない。即ち草食動物は一部分が肉食動物に捕食されるが, 他の一部は自然死して草の肥料となる。又生きている動物の排泄物も草の肥料となる。しかしこれらの検討は今後の課題としたい。

#### References

- 1) A. J. Lotka, Proc. Natl. Acad. Sci., U. S. A., 6, 410 (1920)
- 2) V. Volterra, Nature 118, 558 (1926)
- 3) R. Hirota and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn, 40, 891 (1976)
- 4) K. Narita, J. Phys. Soc. Jpn, 51, 1682 (1982)
- 5) E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th ed., §20.6