

「質量を保存する Volterra 系」への追補

名工大・物理 森 次 雄

要 旨

前号で述べた標題の論文について、記述不十分と思われる点、及び楕円積分の変形についてその後気付いた点を補足する。

§ 1 定常解から離れた解の Soliton 的性格

閉じた 3 種族の系の人口を X_1, X_2, X_3 とすると、前報¹⁾に述べた通り、点 (X_1, X_2, X_3) は平面

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3 \quad (1)$$

上を動き、この平面上にどれか 1 種族にのみ人口の集中した状態を表す 3 点 A, B, C をとると、定常解は三角形 ABC の重心 G で表される。定常解の近傍での人口変動は点 (X_1, X_2, X_3) が平面 (1) 上で G を中心とする円運動をすることで表され、 $X_\mu(t)$ が正弦関数となることは既に述べた。ところが解が定常解から大きくはずれると、点 (X_1, X_2, X_3) は殆ど三角形 ABC の辺をなぞる様になる。この様な軌道で点 (X_1, X_2, X_3) が A 点の近傍にあると質量保存の条件 (1) のため、 X_1 のみが異常に大きく (3 に近い)、 X_2 及び X_3 は小さくなる。この様な人口集中が時間的にずれて 3 種族の間を巡回する。これを Soliton 解と呼ぶことが出来る。即ち前号で述べた Pe 関数による解は正弦関数解と Soliton 解を両極限として含んでいる。このことは前報の第 5 図から明らかであるが、念のため

$$X_1 X_2 X_3 = k, \quad 0 < k < 1 \quad (2)$$

で定義されたパラメタ k の小さい場合を考える。 $k = 0.1$ とすれば Pe 関数に関する各パラメタは次の様になる。

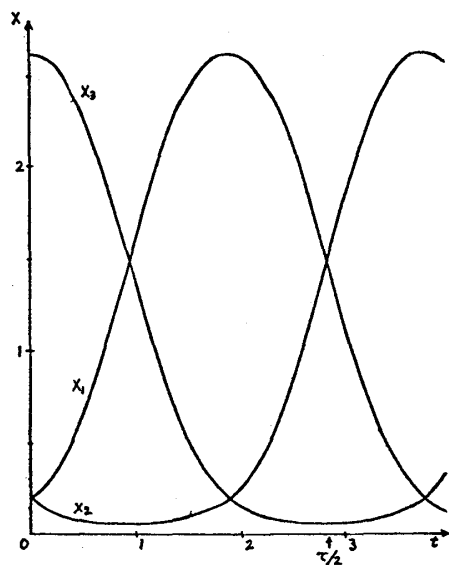
$$\left. \begin{aligned} k = 0.1 : g_2 &= 6.15 \\ g_3 &= -2.935 \\ \alpha_2 &= 0.0458343 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} A_2 &= 1.3645980 \\ A_3 &= 0.0968970 \\ p_1 &= -1.4317738 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_3 = 2.6083998 \\ \alpha_4 = 3.3457659 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} p_2 = 0.7116623 \\ p_3 = 0.7201115 \end{array} \right\}$$

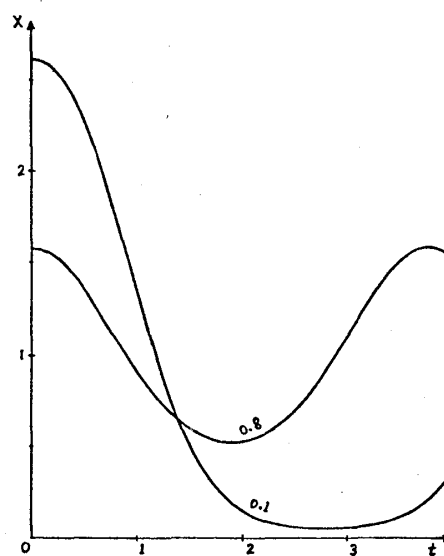
前報と同様に $t=0$ に於て X_3 が極大となる初期条件を与えれば $k=0.1$ に対する $X_\mu(t)$ の変動は第1図のようになる。1種族に人口の集中する Soliton 的状态が周期の3分の1ずれて次の種族へ伝播し、各種族を巡回する模様が明らかである。この場合 Pe 関数の周期 τ は次の値をとる。

$$k=0.1 : \quad \tau = 5.671$$

同じ初期条件 ($X(0) = \text{Max}$) の下で $k=0.8$ に対する準正弦関数的解と $k=0.1$ に対する Soliton 的解とを対比させたのが第2図である。



第1図 $k(=X_1X_2X_3)=0.1$ の場合の人口変動 $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$



第2図 $X(t)$ の $k=0.8$ に対する準正弦波的振舞と $k=0.1$ に対する Soliton 的振舞

§2 楕円積分の変換

質量を保存する三すくみ Volterra 系の方程式

$$\left. \begin{array}{l} dX_1/dt = X_3X_1 - X_1X_2 \\ dX_2/dt = X_1X_2 - X_2X_3 \\ dX_3/dt = X_2X_3 - X_3X_1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

から楕円積分

$$\int_{\alpha_2}^X dX / \sqrt{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)(X-\alpha_4)} = t \quad (4)$$

$$(\alpha_1 = 0, \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4)$$

が導かれること、及びこれが変換

$$X = \alpha_2 + A_3 / (P - A_2 / 2) \quad (5)$$

により Pe 関数 $P(t)$ の定義式

$$t = \int_P^\infty dP / \sqrt{4P^3 - g_2P - g_3}$$

$$= \int_P^\infty dP / \sqrt{4(P-p_1)(P-p_2)(P-p_3)} \quad (6)$$

$$(p_1 < p_2 < p_3)$$

に帰することを前報で述べ、パラメタ A_2, A_3, g_2, g_3 の表式を与えた。又周期 τ を (6) 式から計算した。ところがこの解は Jacobi の sn 関数によっても表されることをここに記す。

Pe 関数と sn 関数の間には

$$P(t) = p_1 + \frac{p_3 - p_1}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{p_3 - p_1} t, \sqrt{(p_2 - p_1)/(p_3 - p_1)})} \quad (7)$$

なる関係がある。²⁾ これを (5) 式に代入すれば

$$X(t) = \alpha_2 + \frac{A_3 \operatorname{sn}^2(\sqrt{p_3 - p_1} t)}{(p_1 - A_2/2) \operatorname{sn}^2(\sqrt{p_3 - p_1} t) + p_3 - p_1} \quad (8)$$

となる。 K を第 1 種完全楕円積分とすれば Pe 関数及び X の周期は

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{p_3 - p_1}} K \left(\sqrt{\frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1}} \right) \quad (9)$$

で与えられる。故に τ は既製の数表³⁾から求められる。(9)式についてはポケット・コンピュータ(前報でもそうであったが)による自前の計算も可能で、この方は内挿の手続きが不要である。前報及び本報で $k = 0.8$ 及び 0.1 に対する τ の数値を与えたが、これは 2 種以上の方法を試みて確認した有効数字を記したものである。

森 次雄

成田⁴⁾は無有限連鎖の Volterra 系

$$dX_{\mu}/dt = X_{\mu-1}X_{\mu} - X_{\mu}X_{\mu+1} \quad (10)$$

及びその拡張形の解を sn 関数で記述しているが、楕円関数による特殊解の表現は色々あると思われ、三すくみの巡回条件をつけて一致させ得るかどうかは未だ調べていない。

文 献

1. 森 次雄：物性研究 **39**, 森：質量を保存する Volterra 系 (物性研究 Vol. 39, NO. 3) の頁 (1982)
2. 例えば安藤四郎：楕円積分・楕円関数入門 § 3.5 日新出版 (1970)
3. 林 桂一：高等関数表, 初版 1941 (岩波), 第 2 版 1967 (同)
4. 成田和明：物性研究 **36**, 207 (1981)