える厳密解に相当している。またこの解は,

$$I=\int_{-L}^{L} u\,\mathrm{d}x = 2n\pi$$

を満足しており, $\theta \gg 1$ の極限で線形解

$$(n\pi/L)(1-\cos\frac{n\pi}{L}x/\cosh\theta)$$

に移行することが容易に示される。初期値問題の厳密に解きうる例として, さらに2つの平衡解の線型重ね合せが考えられるが, 解析性の議論から有限時間で必らず爆発することも示される。

一定解の線形安定性を調べることにより, $I<2\pi$ では常に安定で, $I=2\pi$ のとき平衡解への分枝が起こることがわかるが, 方程式が線形化により, 厳密に解ける利点を生かして, その挙動を詳しく調べることは興味深い問題である。

引 用 文 献

1) 薩摩順吉, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 1423
2) 宗像豊哲, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977) 1723
3) 三村昌泰, 永井敏隆, 数学 **33** (1981) 342
4) 蔵本由紀, Preprint

ある(生物)孤立波について

広島大・理 三 村 昌 泰

Korteweg-de Vries 方程式を要とした非線形分散方程式の解析, あるいは狭義にいってソリトン理論は, 最近数学の諸分野との深い交わりを通して急激に進められていることは周知の事実である。一方, この方程式と対比して生物学, 生物物理学, 化学等にしばしば現われる非線形散逸方程式がある。二つの方程式の違いは保存則の数の違い(粗くいえば有無の差), 時間に関する可逆性の有無等であろう。[1] 後者の方程式についても, 興味ある非線形波が数多く見つけられているが,[2] 前者の式に較べてそれ程統一的な数学解析が行われていない。

本報告では，後者の方程式を念頭におき，しかしながらソリトンのような孤立波を生み出す生物モデルを簡単に紹介しよう。

ここでは捕食者から身を守るために「群れ」を成す被捕食者のパターン形成を孤立波という観点から眺めてみたい。生態学的背景については省略する。[3)]

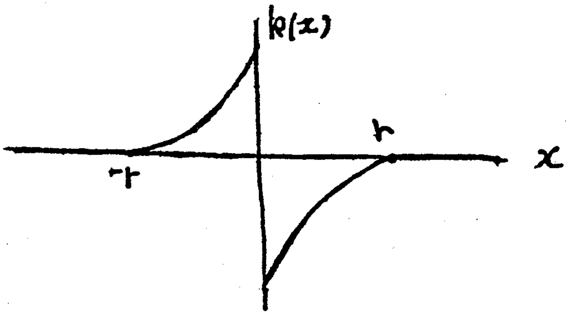
方程式は空間一次元の区間上で考え，

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}J=0,\quad t>0,\quad x\in \boldsymbol{R}$$

とする。ここで $u(t,x)$ は時刻 t，場所 x での（考えている被捕食者の）個体群数とする。J はフラックスであり，次の形とする：

$$J=-d(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\int_{\boldsymbol{R}}k(x-y)u(t,y)\,\mathrm{d}y\cdot u$$

ここで $d(u)$ は $u>0$ に対して $d(u)>0$，$d'(u)>0$，$d(0)=0$ を満たす関数とし，核 $k(x)$ は次のような関数形とする。



簡単に J の意味を説明しよう。第１項は d が定数であれば，通常の拡散を意味するが，ここでは $d'(u)>0$，$d(0)$ から分散が個体数に依存する（個体群圧）効果，そして $u=0$ のとき拡散が退化するという非線形拡散を考えている。第２項は

$$(k*u)u=\left(\int_x^{x+r}k(x-y)u(t,y)\,\mathrm{d}y-\int_{x-r}^{x}k(y-x)u(t,y)\,\mathrm{d}y\right)u$$

と書けるから，もしも $k(x)$ が奇関数とすれば，$(-\infty,x)$（あるいは $(x-r,x)$）上の全個体数が (x,∞)（$(x,x+r)$）の全個体数よりも多い（少ない）ならば $(k*u)$ の符号は負（正）となる。つまり考えている集団は（捕食者から身を守るために）仲間の多い方へ移動することを意味する。このようにこれから扱うモデルは（KdV 方程式と同様に）拡散（あるいは分散）と集中という２つの相反する機構をもっているのである。

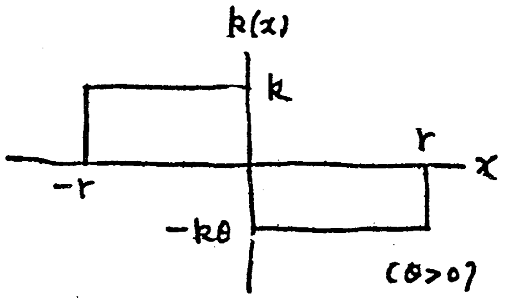
我々の興味は (1) に対して，非負で，その台がコンパクトな関数 $u_0(x)$ を初期関数にもつ

初期条件

(2) $u(0, x) = u_0(x)$

を与え，(1)，(2) の解 $u(t, x)$ がはたして「群れ」を示すようなパターンを形成するであろうかを論じることである。以下では話を単純かつ明確にするために

$$d(u) = m u^{m-1} \ (m > 1),$$



と $d(u)$，$k(x)$ に具体的な関数形を与える。このとき (1) は次のように書ける：

(3) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^m) - k\left\{\theta \int_x^{x+r} u(t, y)\,\mathrm{d}y - \int_{x-r}^{x} u(t, y)\,\mathrm{d}y\right\} u\right]$$

先ず $r = \infty$ の場合を考える。このとき (3) は更に簡単化される。

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^m) - k\left\{\theta c - (1+\theta)\int_{-\infty}^{x} u(t, y)\,\mathrm{d}y\right\} u\right]$$

ここで

$$\int_R u(t, x)\,\mathrm{d}x = \int_R u_0(x)\,\mathrm{d}x \equiv c$$

いま

$$\varphi(v) = k(\theta c - (1+\theta) v)$$

と書くことにすれば (4) は次のように書ける。

(5) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u^m) - \varphi c \int_{-\infty}^{x} u(t, y)\,\mathrm{d}y)\, u\right]$$

我々は「群れ」を示すパターンに興味があるので孤立する進行波解を最初にもとめてみよう。それは，

$$u(t, x)=w(x-\xi t)\equiv w(s)$$

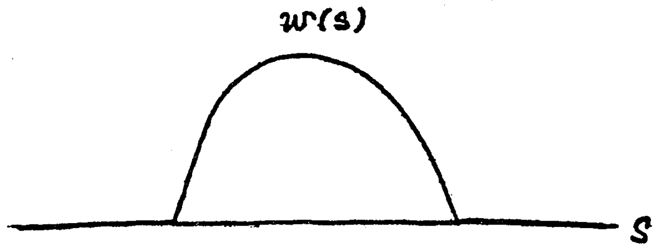
の形の解で次の式から得られる：

$$(6)\quad \begin{cases} (w^m)''+\xi w'-[\varphi(\int_{-\infty}^{s} w(\eta)\,\mathrm{d}y)\,w]'=0, & s\in \boldsymbol{R} \\ \lim\limits_{|s|\to\infty} w=0,\ \int_{\boldsymbol{R}} w\,\mathrm{d}x=c\ \left('=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) & \end{cases}$$

定理。[4] 問題(6)を考える。このとき解 $w(s, \xi)$ は唯一つ存在して，速度 ξ は，

$$\xi=\frac{\Phi(c)-\Phi(0)}{c}\quad (\Phi=\int\varphi)$$

で与えられる。



(注) $w(s)$ の台はコンパクトである。

我々の元の問題にもどると，

$$\Phi(v)=k\left(\theta c-\frac{1+\theta}{2}v\right)v$$

であるから

$$\xi=\frac{\theta-1}{2}kc\ (\theta>0)$$

となる。つまり(例えば) θ, k を固定すれば，ξ は全個体数 c に比例している。

定理。[4] $w(s)$ を上でもとめた進行する孤立波解とする。そして

$$\int_{\boldsymbol{R}}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}[u_0(\eta)-w(\eta)]\,\mathrm{d}\eta=0$$

とする(これによって $w(s)$ は一意に決まる)。

このとき，

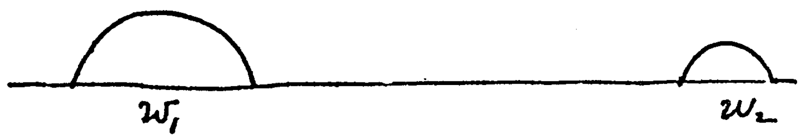
$$\lim_{t\to\infty} \| u(t, x) - w(x - \xi t) \|_{L^\infty} = 0$$

ただし,

$$\xi = \frac{\Phi(c) - \Phi(0)}{c}$$

以上の結果から, $r=\infty$ のとき $u_0(x)$ を初期分布にもつ解 $u(t, x)$は漸近的に進行する孤立波解に近づくことがわかる。

それでは $r<+\infty$ の場合にはどうであろうか。 この場合については未だ解析がなされていない。しかし特別な場合には興味ある現象があることがわかる。いま, 上でもとめた孤立波解 $w_i(x)$ で全個体数が c_i であるものを2つ考える。



$\int_R w_1 \, dx = c_1$ $\quad (c_1 > c_2) \quad$ $\int_R w_2 \, dx = c_2$

このちき, w_i $(i=1, 2)$ の台のコンパクトの大きさが r より小さく, 更に2つの孤立派が十分離れているとすれば, 前の議論が直接使えて2つの波はそれぞれ ξ_i の速度で動きだし, もしも $\theta>1$ であれば, $\xi_1>\xi_2>0$ となるので, この2つの波はいつかは衝突することが予想される。その後はどうなるであろうか？

我々のモデルには保存則は一つであるので, KdV方程式の2－ソリトンのような状況は期待できない。これについては現在数値解のみでしか答えることができないが, 興味ある問題の一つであろう。

参 考 文 献

1) G. ニコリス, I. プリゴジーヌ：散逸構造 (小畠, 相沢訳) 岩波書店 (1977)

2) P. Fife: *Math. Aspects of Reacting & Diffusing Systems,* **28**, Lecture Notes in Biomath. (1979).

3) W. D. Hamilton: Jt B. **31**, 295–311 (1971).

4) 三村, 永井：生物モデルの微分方程式, 数学, 33, 342－354 (1981) 岩波書店