非局所非線形方程式の厳密解

宮崎医科大　薩　摩　順　吉

波動現象や拡散現象を取り扱う際に，非線形性と非局所性の両者を考慮しなければならない場合がある。そのとき積分項を含んだ非線形偏微分方程式を解析する必要があるが，厳密に扱える場合は一般にはきわめてまれである。

最近水中での非線形内部波を記述する方程式（Benjamin-Ono 方程式，Intermediate Long Wave 方程式）の厳密解が広田の方法や逆散乱法を用いて求められることがわかった。その方程式は系の分散関係を反映した特異積分項と二次の非線形項を持った偏微分方程式であるが，特異積分項の性質を利用して実変数を解析関数の境界値に分解し，微差分方程式に帰着させる。それと簡単な形の二次形式の方程式もしくは逆散乱問題で重要な役割を果す Gel'fand-Levitan 線形積分方程式と対応をつけるというのが厳密解を求める手段の概略である。

筆者はその手法を部分的に用いて，次の型の非線形拡散方程式が線形化され厳密に解きうることを明らかにした。[1)]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\int K(x-x')\,u(x')\,\mathrm{d}x'\,u(x)\right] \tag{1}$$

この型の方程式は，液体の不安定性と凝固の問題に関して宗像[2)]により，また分散と集中効果をもつ生物学的モデルとして三村・永井[3)]により提出されている。前者は u を粒子密度として Vlasov 型の運動方程式から導びかれたものであるが，積分核は系の直接二体相関関数に関係したもので与えられている。また後者の場合には u を生物の個体数として，群れをなす効果が積分項で与えられている。(1) 式が厳密に線型化されるのは積分核が $\coth x$ 型（もしくはその極限としてのヒルベルト変換型）の特異性をもつ場合であるが，簡単な解の考察から，初期値の大きさに依存して，平衡解に近づく場合と有限時間で爆発する場合のあることがわかっている。

最近，蔵本[4)]は化学振動系でのリズムに対する理論を提出し，統計的に同等な多数のリミットサイクル振動子に相互作用および外的ゆらぎが存在した場合，そのモデルは次の方程式で記述できることを示した。

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\frac{\partial^2 N}{\partial \phi^2}-\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\left\{1+\int_0^T \Gamma(\phi-\phi')\,N(\phi',t)\,\mathrm{d}\phi'\right\}N(\phi,t)\right] \tag{2}$$

ただし，ここで$N(\phi, t)$は時刻tに位相ϕをもつ振動子の数密度，Dは拡散係数，Γは相互作用に相当する積分核，Tはリミットサイクルの一周期である。(2) 式は適当な変数変換により (1) 式に帰着できるが，積分核が特別な場合にやはり厳密に解きうることを以下に示す。

$\cot x$ 型の積分核を考える。すなわち (1) 式の積分項を

$$\mathscr{P}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2L}\cot\frac{\pi}{2L}(x'-x)\,u(x')\,dx'$$

とする。ここでuに対して$u(x)=u(x+2L)$の周期的境界条件を課す。そのとき上・下半複素平面で解析的な関数の境界値$U^{\pm}(x)$を

$$U^{\pm}(x)=\mathscr{P}\int_{-L}^{L}\frac{1}{2L}\cot\frac{\pi}{2L}(x'-x)\,u(x')\,dx'\pm\mathrm{i}\,u(x) \tag{3}$$

で導入すれば，(1) 式は，

$$U^{\pm}_{t}-U^{\pm}_{xx}+U^{\pm}U^{\pm}_{x}=0 \tag{4}$$

と分解される。さらに

$$U^{\pm}(x)=-2\frac{\partial}{\partial x}[\log f^{\pm}(x)]+c \tag{5}$$

の従属変数変換を行なって，(4) 式は

$$f^{\pm}_{t}-f^{\pm}_{xx}+c\,f^{\pm}_{x}=0 \tag{6}$$

の線形拡散方程式に帰着される。したがって (1) 式の初期値問題を解くためには，初期値$u(x,0)$から (3) 式により$U^{\pm}(x)$を，さらに (5) 式から$f^{\pm}(x,0)$を計算して (6) 式を解き，

$$u(x,t)=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\log[f^{+}(x,t)/f^{-}(x,t)] \tag{7}$$

から時刻tでの解を求めればよい。ただしこれらの過程で，たえず$U^{\pm}$の解析性を注意しておかなければならない。

もっとも簡単な解として，平衡解

$$u(x,t)=\frac{\dfrac{n\pi}{L}\sinh\theta}{\cos\dfrac{n\pi}{L}x+\cosh\theta} \tag{8}$$

が存在する。ただし，nは自然数，θは任意定数である。この解は蔵本モデルでのリズムを与

える厳密解に相当している。またこの解は，

$$I=\int_{-L}^{L} u\,\mathrm{d}x = 2n\pi$$

を満足しており，$\theta \gg 1$ の極限で線形解

$$(n\pi/L)(1-\cos\frac{n\pi}{L}x/\cosh\theta)$$

に移行することが容易に示される。初期値問題の厳密に解きうる例として，さらに2つの平衡解の線型重ね合せが考えられるが，解析性の議論から有限時間で必らず爆発することも示される。

一定解の線形安定性を調べることにより，$I<2\pi$ では常に安定で，$I=2\pi$ のとき平衡解への分枝が起こることがわかるが，方程式が線形化により，厳密に解ける利点を生かして，その挙動を詳しく調べることは興味深い問題である。

引 用 文 献

1) 薩摩順吉， J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 1423

2) 宗像豊哲， J. Phys. Soc. Japan **43** (1977) 1723

3) 三村昌泰，永井敏隆，数学 **33** (1981) 342

4) 蔵本由紀， Preprint

ある（生物）孤立波について

広島大・理　　三 村 昌 泰

Korteweg-de Vries 方程式を要とした非線形分散方程式の解析，あるいは狭義にいってソリトン理論は，最近数学の諸分野との深い交わりを通して急激に進められていることは周知の事実である。一方，この方程式と対比して生物学，生物物理学，化学等にしばしば現われる非線形散逸方程式がある。二つの方程式の違いは保存則の数の違い（粗くいえば有無の差），時間に関する可逆性の有無等であろう。[1] 後者の方程式についても，興味ある非線形波が数多く見つけられているが，[2] 前者の式に較べてそれ程統一的な数学解析が行われていない。