§4　2次元の方程式を解析する為に開発されたRH変換を4次元の (Anti) Self-Dual 方程式に応用して成功したが，だからと言って，我々は最終目標に到達したわけではない。 (Anti) Self-Dual 方程式の解空間の構造を決定せよという問題は未知である。そして，その重要性故に追求すべき問題であると思う。我々としては， RH変換が，その為の手掛りを与えるものと信じます。

参　考　文　献

1) R. S. Ward: Phys. Lett. **79A** (1977).
2) M. F. Atiyah and R. S. Ward; Commun. Math. Phys. **55** (1977) 117.
3) E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. Y. Yates and P. Goddard: Commun. Math. Phys. **58** (1978), 223.
4) C. N. Yang: Phys. Rev. Lett. **38** (1977), 1377.
5) K. Pohlmeyer: Commun. Math. Phys. **72** (1980), 37.
6) V. E. Zakharov and A. v. Mikhairov; Sov. Phys. JET JETP **47** (1978), 1017.
7) I. Hauser and F. J. Ernst: J. Math. Phys. **21** (1980), 1126; ibid. **21** (1980), 1418.
8) K. Ueno and Y. Nakamura: to appear in Phys. Lett. **B.**

量子完全積分可能系

東大・教養物理　和　達　三　樹

1. はじめに

ソリトンの研究が本格的に始められてから，まだ10年しか経っていない。既に驚くべきほど多くのソリトン系（完全積分可能系）が報告され，実験との比較も行なわれている。さらについ最近になって，古典論において成功を収めた逆散乱法を量子場の理論に応用する研究が始められた。この逆散乱法の量子論への拡張を「量子逆散乱法」という。量子逆散乱法の研究が進むとともに，完全積分可能系の持つ性質（S行列の因子化，ベーテ状態等）が確かめられ，又，解析的方法（統計力学での手法を含めて）が統一的に理解できるようになってきた。以下は，その大要である。[1)]

2. 古典ソリトン系

無限個の保存則，ソリトン解，完全積分可能性の証明， Bäcklund 変換，広田の方法等は，逆散乱法の定式化から導出することができる。古典系におけるN個のソリトンは，u_s を 1-ソリトン解として，漸近的に

$$u(x,t) \to \sum_{i=1}^{N} u_s(x - v_i t + \delta_i^{\pm}), \quad t \to \pm\infty$$

で記述できる。実際に，位相のずれ $\delta_i^{\pm}$ を求めてみると，N個のソリトンの衝突は，2体散乱の重ね合わせであり，多体効果はないことがわかる。[2] このことは，S行列の因子化の古典版であると解釈される。

3. 量子逆散乱法[3),4),5)]

量子場の理論のモデルとして，非線形シュレディンガー方程式

$$\mathrm{i}\,\phi_t + \phi_{xx} - 2\kappa\phi^{+}\phi\phi = 0\,,\quad \kappa = \varepsilon\tilde{\alpha}^2\,,\quad \varepsilon = \pm 1$$

を考える。$\phi(x,t)$ と $\phi^{\dagger}(x,t)$ は演算子であり，ボーズ交換関係

$$[\phi(x,t),\ \phi^{+}(y,t)] = \delta(x-y)$$

をみたす。線形方程式

$$\begin{cases} \psi_{1x} + \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda}{2}\psi_1 = \mathrm{i}\,\tilde{\alpha}\,\phi^{+}\psi_2 \\[2ex] \psi_{2x} - \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda}{2}\psi_2 = -\mathrm{i}\,\varepsilon\tilde{\alpha}\,\psi_1\phi \end{cases}$$

を補助方程式として導入する。散乱データを

$$\psi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/2)\cdot\lambda x},\quad x \to -\infty$$

$$\to \begin{pmatrix} A(\lambda)\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}/2)\cdot\lambda x} \\ B(\lambda)\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}/2)\cdot\lambda x} \end{pmatrix},\quad x \to \infty$$

で定義すると，演算子 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ は，

$$[H, A(\lambda)] = 0\,,\quad [H, B(\lambda)] = -\lambda^2 B(\lambda)\,,$$

$$[A(\lambda), A(\mu)] = [B(\lambda), B(\mu)] = 0$$

$$A(\lambda) B^{+}(\mu) = \frac{\lambda - \mu + i\kappa}{\lambda - \mu} B^{+}(\mu) A(\lambda)$$

$$A^{+}(\lambda) B^{+}(\mu) = \frac{\lambda - \mu - i\kappa}{\lambda - \mu} B^{+}(\mu) A^{+}(\lambda)$$

$$B(\lambda) B^{+}(\mu) = \frac{(\lambda - \mu)^2 + \kappa^2}{(\lambda - \mu)^2} B^{+}(\mu) B(\lambda) + 2\pi\alpha^2 A(\alpha) A^{+}(\mu) \delta(\lambda - \mu)$$

をみたす。これらのことから，無限個の保存則が存在すること，ベーテ状態を代数的に構成できることがわかる。また，演算子

$$R^{+}(\lambda) = -i\,\varepsilon / \tilde{\alpha} \cdot B^{+}(\lambda) (A^{+}(\lambda))^{-1}$$

から規格された in-state と out-state を作り出すことができ，N 体散乱のS行列は$(1/2)N(N-1)$個の2体S行列の積（S行列の因子化）で表わされることが証明できる。[5]

4. S行列の因子化

量子論的な完全積分可能系においてはS行列は因子化されると仮定すると，2体S行列はいわゆる因子化方程式を解くことによって，厳密に求められる。このような理論を，S行列の因子化理論という。[6),5] S行列の因子化に関する証明は終ったとは思われない。2成分の場合の因子化方程式の解は最近求められた。[7]

5. 格子系の統計力学

格子系の統計力学において解けるモデルとして有名な Baxter の 8-vertex model は，量子ハイゼンベルグ模型と等価である。これらは，量子逆散乱法によっても解くことができる。[8] その数学的な構造を検討すると，Yang-Baxter の関係式が最も基本的であることがわかる。さらに，Yang-Baxter の関係式はS行列の因子化方程式と等価である[9]ので，解けるモデルの数学的構造が共通であることが明らかになった。以上のことを逆にたどれば，S行列の因子化方程式を解くことにより，より一般の vertex model や積分可能なスピン系を探すことができる。[10]

6. まとめ

ソリトンの量子論において，残された問題は多い。ソリトンの量子統計力学（熱力学量や相

関関数の計算等）は，未解決といってよいであろう。佐藤，三輪，神保，McCoy, Wu 等は，相関関数がみたす非線形方程式を求めている。もちろん，量子逆散乱法を使って相関関数を求めることができ，その仕事も始まっている。

完全積分可能系の性質が明らかにされるとともに，解けない系の取扱いにも目を向けるべき段階にきていると思う。完全積分可能系もカオス系もある意味では極端な場合を考察しているわけで，その両者の対比から新しい発展が生まれるかもしれないと感じている。

文　献

1) 和達三樹：日本物理学会誌第36巻第11号（1981）786.
2) M. Wadati and M. Toda; J. Phys. Soc. Jpn. **32** (1972) 1403.
3) L. D. Faddeev; Sov. Sci. Rev. (1980) 107.
4) H. B. Thacker; Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
5) K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati; Progr. Theor. Phys. **66** (1981) 1284.
6) A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov; Ann. Phys. **120** (1979) 253.
7) M. Uchinami, K. Sogo, Y. Akutsu and M. Wadati; preprint.
8) L. A. Takhtadyan and L. D. Faddeev; Russian Math. Surveys **34** (1979) 11.
9) A. B. Zamolodchikov; Commun. Math. Phys. **69** (1979) 165.
10) K. Sogo and M. Wadati; preprint.

ソリトンの問題とその周辺

横浜国大・工　　戸　田　盛　和

1. 線形と非線型の間

1960年からと記憶するが，格子振動の研究グループが発足し，基研で毎年研究会をおこなった。その主なテーマは不純物を含む格子の問題で，格子振動と結晶の電子状態が相似していること，格子の振動スペクトルと電子の準位密度が同様に論じられることが，その背景にあった。少数不純物による局在振動，無秩序な配列の２元合金のスペクトル，重い不純物のブラウン運動，不純物を含む格子のエネルギー流などが論じられた。