4次元 Yang-Mills 方程式の変換理論

京大・数理研　上 野 喜三雄

§0　Anti-Self-Dual 方程式の解の組織的な構成法を最初に見出したのは，Ward 及び Atiyah [1]，[2] である。彼らは4次元の (Anti) Self-Dual 方程式を $\boldsymbol{P}^3$（3次元複素射影空間）上の解析的ベクトル束の問題に翻訳することにより，インスタントン解を構成しようと試みた。その方法の本質は Riemann-Hilbert 問題に深く関わっている。（Atiyah-Ward の理論については，Corrigan et. al. [3] に素晴しい解説があるので，それを参照して下さい。）そして我々の理論は，彼らの方法を変換理論という立場から読み返すことにより得られたと言ってもよい。

§1　(Anti) Self-Dual 方程式は，複素ゲージポテンシャル B_y，$B_{\bar{y}}$，B_z，$B_{\bar{z}}$（これらは $\boldsymbol{C}^4 \ni (y, \bar{y}, z, \bar{z})$ 上の n×n 行列函数）を導入することにより

$$F_{yz} = F_{\bar{y}\bar{z}} = 0 \tag{1}$$

$$F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}} = 0 \tag{2}$$

（ただし，$F_{yz} = \partial_z B_y - \partial_y B_z - [B_y, B_z]$ etc.）と表されることが知られている [4]。方程式 (1) は 0-curvature 条件であるから

$$\begin{aligned} &B_y = D^{-1}\partial_y D, \quad B_z = D^{-1}\partial_z D \\ &B_{\bar{y}} = \bar{D}^{-1}\partial_{\bar{y}}\bar{D}, \quad B_{\bar{z}} = \bar{D}^{-1}\partial_{\bar{z}} D \end{aligned} \tag{3}$$

と積分できる。更に

$$J = D\bar{D}^{-1} \tag{4}$$

と置けば方程式 (2) より，J は単独の方程式

$$\partial_{\bar{y}}(J^{-1}\partial_y J) + \partial_{\bar{z}}(J^{-1}\partial_z J) = 0 \tag{5}$$

を満すことがわかる [5]。 (5) から出発して今と逆の過程をたどれば，(Anti) Self-Dual 方程

式(1)，(2)を得る。ただし，分解(4)は一意的ではない。例えば

$$D \to DD', \ \overline{D} \to \overline{D}D'$$

(D' は任意函数)と置き換えてもよいのであるが，これは丁度ゲージ変換に対応している。

物理においては，実領域で，しかもゲージポテンシャルが実リー環に属することを要請する。従って，それに応じて J の方にも様々な制約が加わるのであるが，今は，それを一切無視して J は単に $GL(n, \boldsymbol{C})$ 値函数として話を進める。(5)を(Anti) Self-Dual 方程式と呼ぶことにする。

J から複素ゲージポテンシャル B_y 達を再構成する方法は，上に述べた以外にもいくつか知られている。例えば，$J \in SL(2, \boldsymbol{C})$ として

$$J = f^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -g \\ e & f^2 - eg \end{bmatrix}$$

とパラメトライズする。このとき

$$B_y = f^{-1} \begin{pmatrix} \partial_y f & 0 \\ -2\partial_z g & -\partial_y f \end{pmatrix}, \quad B_{\overline{y}} = f^{-1} \begin{pmatrix} -\partial_{\overline{y}} f & 2\partial_z e \\ 0 & \partial_{\overline{y}} f \end{pmatrix}$$

$$B_z = f^{-1} \begin{pmatrix} \partial_z f & 0 \\ 2\partial_{\overline{y}} g & -\partial_z f \end{pmatrix}, \quad B_{\overline{z}} = f^{-1} \begin{pmatrix} -\partial_{\overline{z}} f & -2\partial_y e \\ 0 & \partial_{\overline{z}} f \end{pmatrix}$$

は，(Anti) Self-Dual 方程式の解である。更に $e = f = g$ と置いたものが 't Hooft の ansatz である。

§2　次に，線型化問題(即ち，逆散乱形式の構成)を考察する。その為に，微分作用素

$$D_1 = \zeta^{-1} \partial_{\overline{z}} + \partial_y, \quad D_2 = \zeta^{-1} \partial_{\overline{y}} - \partial_z$$

(ζ：複素パラメーター)を導入する。又，$A_k = A_k(y, \overline{y}, z, \overline{z})$ $(k = 1, 2)$ を n×n 行列函数とする。このとき，(Anti) Self-Dual 方程式(5)は線型微分方程式系

$$D_k Y(\zeta) = \zeta^{-1} A_k Y(\zeta) \tag{6}$$

の積分可能条件

$$[D_1-\zeta^{-1}A_1,\ D_2-\zeta^{-1}A_2]=0$$

に同値である。$Y(\zeta)=Y(y,\bar{y},z,\bar{z};\zeta)$ を (6) の基本解行列で $\zeta=0$ の近傍で正則とすれば,

$$\begin{gathered} J=Y(0), \\ A_1=\partial_{\bar{z}}J\cdot J^{-1},\quad A_2=\partial_{\bar{y}}J\cdot J^{-1} \end{gathered} \tag{7}$$

である。この事実は, Atiyah-Ward の Penrose 変換を用いる議論によっても得られるし, 又, 方程式 (5) のシンメトリーを調べることでも得られる。

次に, 変換理論を考察する。これは, 線型問題の言葉で述べれば次の様になる。まず, 出発点となる線型方程式 (6) と基本解行列 $Y(\zeta)$ の組を $(Y(\zeta),A_k)$ とする。 これより, 別の組 $(\widetilde{Y}(\zeta),\widetilde{A}_k)$ を与えることが変換である。 このプロセスを実行する為に, Riemann-Hilbert 問題を用いる。 Reimann-Hilbert 問題とは, ある領域の境界上の函数を領域の外部で正則な函数と, 内部で正則な函数との積に表すことを意味する。我々の場合, それは次の様に設定される。

$$\begin{gathered} X_-(\zeta')=X_+(\zeta')H(\zeta'),\quad \zeta'\in C \\ H(\zeta)=Y(\zeta)u(\zeta)Y(\zeta)^{-1} \end{gathered} \tag{8}$$

ここで, C は ζ- 平面上の原点を囲む解析的曲線, $C_\pm$ を各々, C の内部, 外部とし, $Y(\zeta)$ は $C\cup C_+$ において正則とする。$X_\pm(\zeta)$ は, $C\cup C_\pm$ で正則かつ非特異な行列函数で, $X_-(\zeta)$ は正規化条件

$$X_-(\infty)=1$$

を満すとする。又, $u(\zeta)=u(y,\bar{y},z,\bar{z};\zeta)$ は C 上で解析的, 非特異とし, $D_k u(\zeta)=0$ とする。このことは, $u(\zeta)$ が, ζ, w_1, w_2 $(w_1=\bar{z}-\zeta^{-1}y,\ w_2=\bar{y}+\zeta^{-1}z)$ の函数であることを意味する。

以上が, 我々の考察する Reimann-Hilbert 問題である。この問題が一意的に解行列 $X_\pm(\zeta)$ を持つと仮定しよう(この仮定は $u(\zeta)$ が十分小さければ正しい)。そして

$$\widetilde{Y}(\zeta)=X_+(\zeta)Y(\zeta)\quad \text{in } C_+, \tag{9}$$

$$=X_-(\zeta)Y(\zeta)u(\zeta)^{-1} \quad \text{in } C_-$$

と定める。このとき，$\widetilde{Y}(\zeta)$ は，次の微分方程式系の基本解行列であることがわかる。

$$D_k\widetilde{Y}(\zeta)=\zeta^{-1}A_k\widetilde{Y}(\zeta)$$

$$\widetilde{A}_1=A_1+\partial_y(\partial_w X_-|_{w=0}) \tag{10}$$

$$\widetilde{A}_2=A_2-\partial_z(\partial_w X_-|_{w=0}), \quad \zeta=w^{-1}$$

これで，変換理論が構成されたことになる。$\widetilde{J}=\widetilde{Y}(0)$ とすれば，$\widetilde{J}$ が (Anti) Self-Dual 方程式の新しい解なのである。(8) における $u(\zeta)$ に応じて，いろいろな解がつくられるわけである。

§3　上で構成した変換を RH 変換と呼ぶことにする。Zakharov-Mikhairov［6］や，Hauser-Ernst［7］達は，RH変換をいろいろな2次元の場の方程式に応用して大きな成果を収めて来ました。RH 変換の一般論については，上記の論文や筆者と中村氏との共著論文［8］を参照して貰うことにして，以下，具体的な RH 変換の計算法と，それを用いた 't Hooft のインスタントン解の構成について述べようと思います。

RH変換 (8) において

$$u(\zeta)=1+\frac{c}{\zeta-\zeta_1}P$$

（P は $n\times n$ 定数行列で $P^2=0$ とする。c，ζ_1 は定数）としたときの $X_\pm(\zeta)$ の求め方を述べる。$\zeta_1\in C_+$，又，

$$X_-(\zeta)=1+\frac{R}{\zeta-\zeta_1}$$

と仮定して，行列 R を求めよう。$X_-(\zeta)Y(\zeta)u(\zeta)^{-1}$ が，$\zeta=\zeta_1$ で正則となる為の条件を書き下すことで，

$$R=cY(\zeta_1)PY(\zeta_1)^{-1}(1-c\dot{Y}(\zeta_1)PY(\zeta_1)^{-1})^{-1}$$

（$\dot{Y}(\zeta)$ は，$Y(\zeta)$ の ζ 微分）を得る。

このタイプの初等的な変換と線型微分方程式に対するゲージ変換を繰り返すことにより，

’t Hooft のインスタントン解をつくれる。この解は，§1で述べた ansatz において，

$$e=f=g$$

$$=\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{(y-y_j)(\bar{y}-\bar{y}_j)+(z-z_j)(\bar{z}-\bar{z}_j)}\right)^{-1} \tag{11}$$

と表される。具体的な構成法は，以下に述べる通りである。まず，$u^{(j)}(\zeta)\,(j=1,\cdots,N)$ を

$$u^{(j)}(\zeta)=1+\frac{a'_j}{\zeta-\alpha_j}P,\quad P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_j=\frac{y-y_j}{\bar{z}-\bar{z}_j},\quad a'_j=\frac{a_j}{\bar{z}-\bar{z}_j}$$

とする。a_j，y_j，$\bar{z}_j$ は定数である。又，

$$\varphi^{(0)}(\zeta)=0$$

$$\varphi^{(j)}(\zeta)=\frac{\zeta}{\zeta(\bar{y}-\bar{y}_j)+(z-z_j)}$$

として行列

$$g^{(j)}(\zeta)=\frac{1}{1+\varphi^{(j)}(\zeta)}\begin{pmatrix}1+\varphi^{(j+1)}(\zeta) & \{\varphi^{(j)}(\zeta)-\varphi^{(j+1)}(\zeta)\}\sum_{k=1}^{j}\dfrac{a'_k}{\zeta-\alpha_k}\\ 0 & 1+\varphi^{(j)}(\zeta)\end{pmatrix}$$

$(0\leqq j\leqq N-1)$ を導入する。自明な解 $\widetilde{Y}^{(0)}(\zeta)=1$ から出発して，次の遂次的変換を行う。

$$\begin{cases}\widetilde{Y}^{(j)}(\zeta)=\widetilde{Y}^{(j)}(\zeta)\,g^{(j)}(\zeta)\\[2ex] \widetilde{Y}^{(j+1)}=u^{(j+1)}(\zeta)\circ Y^{(j)}(\zeta) \qquad (0\leqq j\leqq N-1)\end{cases}$$

$(u^{(j)}(\zeta)\circ$ は RH変換を表す）　$\widetilde{J}^{(N)}=\widetilde{Y}^{(N)}(0)$ とすれば，これがインスタントン解 (11) を与える。

§4　2次元の方程式を解析する為に開発されたRH変換を4次元の (Anti) Self-Dual 方程式に応用して成功したが，だからと言って，我々は最終目標に到達したわけではない。 (Anti) Self-Dual 方程式の解空間の構造を決定せよという問題は未知である。そして，その重要性故に追求すべき問題であると思う。我々としては，RH変換が，その為の手掛りを与えるものと信じます。

参考文献

1) R. S. Ward: Phys. Lett. **79A** (1977).
2) M. F. Atiyah and R. S. Ward; Commun. Math. Phys. **55** (1977) 117.
3) E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. Y. Yates and P. Goddard: Commun. Math. Phys. **58** (1978), 223.
4) C. N. Yang: Phys. Rev. Lett. **38** (1977), 1377.
5) K. Pohlmeyer: Commun. Math. Phys. **72** (1980), 37.
6) V. E. Zakharov and A. v. Mikhairov; Sov. Phys. JET JETP **47** (1978), 1017.
7) I. Hauser and F. J. Ernst: J. Math. Phys. **21** (1980), 1126; ibid. **21** (1980), 1418.
8) K. Ueno and Y. Nakamura: to appear in Phys. Lett. **B**.

量子完全積分可能系

東大・教養物理　和　達　三　樹

1. はじめに

ソリトンの研究が本格的に始められてから，まだ10年しか経っていない。既に驚くべきほど多くのソリトン系（完全積分可能系）が報告され，実験との比較も行なわれている。さらについ最近になって，古典論において成功を収めた逆散乱法を量子場の理論に応用する研究が始められた。この逆散乱法の量子論への拡張を「量子逆散乱法」という。量子逆散乱法の研究が進むとともに，完全積分可能系の持つ性質（S行列の因子化，ベーテ状態等）が確かめられ，又，解析的方法（統計力学での手法を含めて）が統一的に理解できるようになってきた。以下は，その大要である。[1]