Explode-Decay Type Solution of the Nonlinear Partial Differential Equations (非線形偏微分方程式の爆発―減衰形の解)

米国・クラークソン大・数学教室　中 村　明

§1 Introduction

ソリトン型の解をもつ非線型偏微分方程式の研究は，大きく広がり近年の流行の一つとなった。かんたんにできる問題は，だいたい解かれたので，質的に新らしい研究が期待される。従って，ここでは視点をかえて従来のソリトン解と異なる解をさがす事を考える。

さて，ソリトンとは一定の波形をもって，一定のスピードで進むパルス状の波であった。ここで大切な事は多くのソリトンを考えた時，それらは互いに衝突するが，非線形システムであるにもかかわらず，それらは互いに波形をくずさずに，すれちがうのであった。いいかえれば非線形システムであるのに線形と同様に〝重ね合せ〞の原理をもつのであった。あとに示すように，non-soliton mode に対しても，やはり，このような美しい重ね合せの原理がなりたつ。

§2 Ripplon Solutions

さて歴史的にみて，上でのべたようなふつうの soliton と異なるタイプの解というのは，Cylindrical KdV [1] という方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{u}{2t} = 0, \tag{I}$$

であらわれた。（ここで下つきそえ字は偏微分をあらわす） (I) 式の最後の項，$u/2t$ を落としたものが有名なKdV 方程式である。(I) 式は空間２次元での円筒対称を仮定した波の半径方向の波の変化をあらわす式である。（すなわち (I) 式の x は本来，半径 r，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ を $r \to x$ と書いているのである）

要するに，たとえば静かな池に石をなげた時に，波の輪が広がってゆくが，この波を記述するものである。だからこの波は波高 $|u|$ が中心では高く，外へひろがるにつれて，だんだん低くなる。初めにプラズマ物理で考えられた時は，この逆のプロセス，つまり外側から波を excite して ingoing の波をつくり，それが中心へ収縮した時，大きい $|u|$(high density plasma) をえるという意図で考えられた。

このタイプの波が，ここで著者がいう explode-decay type solution の第1の例なのである。（(I)式はこの type の解のみをもち，ふつうの一定波形の soliton 解はもたない）

ところが，(I)式は，2次元KdV(or K-P)eq.

$$(u_t+6uu_x+u_{xxx})_x+3\alpha^2 u_{yy}=0,\quad (\alpha=\mathrm{const.})\tag{II}$$

の特別な reduction によって，えられる事が知られていたし，従って(II)式は通常の soliton 解の他に explode-decay type の解ももつのである。[2,3]

それの形は，

$$u=\partial_x^2\log f,$$

$$f=1+\rho_1^2(12t)^{-2/3}\int^x \mathrm{d}x\,A_i^2(z_1),$$

$$z_1\equiv(x+x_1)(12t)^{-1/3}+\left(\frac{y+y_1}{\alpha}\right)^2(12t)^{-4/3},$$

$$[\,\rho_1,\ x_1,\ y_1=\mathrm{const.},\quad A_i''(z)-zA_i(z)=0\,]\tag{1}$$

である。これをかりにリプロン(ripplon)解とよぶと，(II)式はN個の soliton とN'個の ripplon の重ね合せの状態であるような exact solution, N-soliton-N′-ripplon 解をもつのである。[4,5]

そこで，これ以外にも，かんたんな explode-decay type の解をもつ方程式があるか，しらべてみる。2次元 Nonlinear Schrödinger（2D-NLS）eq.,

$$\mathrm{i}\,u_t+\beta u_{xx}+\gamma u_{yy}+\delta u^* uu=0,\tag{III}$$

$$(\beta,\ \gamma,\ \delta=\mathrm{const.})$$

は，大ざっぱにいって

$$|u|\propto\frac{1}{t}\,\mathrm{sech}\,\frac{1}{t}(k_R x+v_R t),$$

$$(k_R,\ v_R=\mathrm{real\ const.})\tag{2}$$

の形の ripplon 解をもつ。[6] 又もう一つの 2D-NLS eq.

$$i\,u_t + (-\beta)\,u_{xx} + \gamma\,u_{yy} + \delta\,u^* u u - 2wu = 0\,,$$

$$\beta\,w_{xx} + \gamma\,w_{yy} - \beta\,\delta\,(u^* u)_{xx} = 0\,, \tag{IV}$$

も (2) のような形の解をもつ。[7] さらに (IV) 式は空間 x, y 方向に減衰する（ localize している）ような lump soliton 解をもつが，それらの波の高さが時間的に $1/t$ によってかわる lump ripplon 解も存在する事がわかる。[8] さて空間一次元では今のところ，このような，かんたんな解析関数であらわされる explode-decay type (ripplon) solution をもつものは，やや特殊な方程式１つだけが知られている。[9]

§ 3　Discussion

今まで，ソリトン方程式というのは，任意の初期状態の波形から出発して，時間発展をすると，何個かのソリトンが残り，その他はさざなみ (ripple) として，単に，きえてゆくというイメージが支配的であった。ところが，この ripple 部分（ or non-soliton　部分）というのも大変おもしろい構造をしており，やはり ripplon とでも呼ぶべき elementary な mode のかさね合せであり，又，１つの ripplon は explode-decay 形の波なのである。大振幅の波を得たい時には，この explode のものが大切になってくるであろう。

References

1) S. Maxon and J. Viecelli: Phys. Fluids **17** (1974) 1614.
2) R. S. Johnson and S. Thompson: Phys. Letters **66A** (1978) 279.
3) N. C. Freeman: Adv. in Appl. Mech. **20** (1980) 1.
4) A. Nakamura: Phys. Rev. Letters **46** (1981) 751.
5) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 19.
6) A. Nakamura: J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2469.
7) A. Nakamura: J. Math. Phys. **23** (1982) to appear.
8) A. Nakamura: Phys. Letters (1982) to appear.
9) A. Nakamura: preprint (1982).