- 5) D. J. Kaup, A. C. Newell: J. Math. Phys. 19 (1978) 798.
- 6) T. Kawata, H. Inoue: J. Phys. Soc. Japan 44 (1978) 1968.
- 7) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan 46 (1979) 1965.
- 8) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan 47 (1979) 1698.
- 9) K. Konno, Y. H. Ichikawa, M. Wadati: J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 1025.
- 10) Y. Ishimori: J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 2471.
- 11) H. C. Yuen, W. E. Ferguson: Phys. Fluids. 21 (1978) 2116.
- 12) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Japan 40 (1976) 286.
- 13) F. Kako, N. Yajima: J. Phys. Soc. Japan 49 (1980) 2063.
- 14) M. Makino, T. Kamimura, T. Taniuti: J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 980.
- 15) G. L. Lamb, Jr.: J. Math. Phys. 18 (1977) 1964.
- 16) F. Lund, T. Regge: Phys. Rev. D, 14 (1976) 1524.

Singularities of the Principal Chiral Field on SL(N, R)

*V. E. Zakharov,

* ランダウ理論物理研究所

*A. V. Mikhailov,

** 富山大学工学部

**川 田 勉

近年,相対論的に不変な非線形場の研究が盛んである。 Zakharov 等は $,^{1-3}$) パラメータ λ を含む N 次行列微分方程式,

$$\Phi_{\xi} = \frac{U}{1+\lambda} \Phi, \quad \Phi_{\eta} = \frac{V}{1-\lambda} \Phi,$$
(1)

により、 Principal Chiral 方程式

$$(g_n g^{-1})_{\xi} + (g_{\xi} g^{-1})_n = 0,$$
 (2)

が、逆散乱法に沿って解ける事を示した。但し、 ξ 、 η は light-cone 座標、 $\xi = (t-x)/2$ 、 $\eta = (t+x)/2$ である。 (2) は、現在迄知られている大半の 2 次元モデル、南部等のカイラ

川田 勉

ルモデル、Gross-Neveu の $Sp(2N, \mathbf{R})$ モデル、 4 Lund-Regge のモデル、その他を含んでいる。ここでは、 $g \in SL(N, \mathbf{R})$ として、 Soliton 解の分類と、この場合の特徴である解の発散の x-t 空間上の軌道 (Singularity) を調べる。

(1) で $U=g_{\xi}g^{-1}$, $V=g_{\eta}g^{-1}$ とすれば,g が実及び det $g={\rm const}$. より,U 、V も実で更に,

$$\operatorname{Tr.} U = \operatorname{Tr.} V = 0 \tag{3}$$

又, (1) の積分可能条件,

$$U_{n} + V_{\varepsilon} = 0, \ U_{n} - V_{\varepsilon} + [U, V] = 0, \tag{4}$$

$$J_{1\xi} = \frac{U_0}{1+\lambda} J_1, \quad J_{2\eta} = \frac{V_0}{1-\lambda} J_2.$$
 (5)

真空解 $J = J_1 J_2$ で Φ を因子化する,

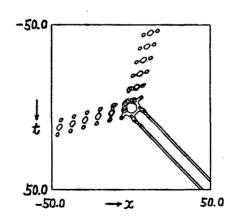


図1 3×3-Breather Soliton の Singularity. 3ケの 2×2-Soliton の共鳴作用にみえる。但し,

$$\lambda_{1} = -\overline{\lambda}_{1} = 0.75 + i$$

$$U_{0} = \begin{pmatrix} 0, & 0 & , & 0 \\ 0, & -0.866, & 0 \\ 0, & 0 & , & 0.866 \end{pmatrix}, V_{0} = \begin{pmatrix} -1, & 0 & , & 0 \\ 0, & 0.5, & 0 \\ 0, & 0 & , & 0.5 \end{pmatrix}$$

(積分定数値は省略)

$$\Phi(\lambda) = \Psi(\lambda) J(\lambda). \tag{6}$$

 λ 独立な行列, ${\it \Phi}_1={\it \Psi}(1)\,{\it J}_1(1)$, ${\it \Phi}_2={\it \Psi}(-1)\,{\it J}_2(-1)$ を導くと, (1),(5) より

$$V \Phi_1 = \Phi_1 V_0, \quad U \Phi_2 = \Phi_2 U_0, \tag{7}$$

$$2 \Phi_{1\xi} = (\Phi_2 U_0 \Phi_2^{-1}) \Phi_1, 2 \Phi_{2\eta} = (\Phi_1 V_0 \Phi_1^{-1}) \Phi_2, \tag{8}$$

を得る。(3), (7) より $\operatorname{Tr.}\ U_0 = \operatorname{Tr.}\ V_0 = 0$, U, V の行列式は保存する事が判る。

詳細は省くが(6)の $\Psi(\lambda)$ は、 $\Psi^{-1}(\lambda)$ も同様だが、 λ に関する部分分数展開を指定すれば決定できる。対称性 $\Psi(\lambda^*) = \Psi^*(\lambda)$ を考慮して次の形が採用された。

$$\Psi(\lambda) = E + \sum_{j=1}^{M_1} \frac{A_j}{\lambda - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{M_1 + M_2} \left(\frac{A_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{A_j^*}{\lambda - \lambda_j^*} \right), \tag{9}$$

 $\Psi^{-1}(\lambda)$ も同様の形である。 * ここに A_j は λ 独立である。右辺第二項の (A_j,λ_j) は実数であり,第三項では複素数である。表示 (9) は, M_1 ケの non-breather soliton と M_2 ケの breather soliton を記述すると考えておく。解の構成は,最終的には連立方程式の解法に帰着される。 Cramer 公式を使う際に現れる行列式は,x-t 空間内のある曲線で消失し,解が発散する。この発散の軌跡 (Singularity) は,行列 U_0 、 V_0 の形と,モードが non-breather か breather かに強く影響される。当然の事ながら, non- breather は自由度が低く簡単であり, Singularity の発生は,パラメータ**)に依る。

以下では、Singularity が常に現れる breather モードに話を限定し、基本的な 2×2 -Soliton (N=2) とその応用に少し触れる。

N=2 では $U_0=V_0$ として良く, $\det U_0$ の符号で分類される。 次の 2 種を考えるものとする。

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

- (i) $\det U_0 < 0$: Pohlmeyer ⁵⁾ に習って (4) を 2 ケの実スカラー場の方程式に直せる。 結果は, $SU(2) \times SU(2)$ 不変の式 ⁵⁾ を $\sinh(\cdot)$ 形に変えたものとなっている。 Singularity は, t-x 面の帯状域内に概周期的に分布する閉曲線となる。
- (ii) $\det U_0=0$: (8) に対称性 $\pmb{\phi}_{1,2}^{\mathrm{T}}=S\,\pmb{\phi}_{1,2}^{-1}\,S^{-1}\,(S=\delta_3\,\delta_1)$ を課すと、Gross-Neveu の Sp (2, \pmb{R}) モデル $^{4)}$ を得る。 Singularity は ξ , η 軸に漸近する双曲線となる。

武野正三

N>2 の時でも遠方における Singularity の様子が解析できる。図 1 は,N=3 , $\det U_0<0$ のケースの数値例である。 (9) で soliton数を, M_1 , M_2 とするのは早計かも知れない。 $\det U_0<0$ で $M_2=2$ のケースを計算して 3 ケの 2×2 – Soliton を遠方で得た。

終りに(2)のエネルギー及び運動量密度,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{4} \operatorname{Tr.} (U^2 + V^2), \quad \mathcal{D} = -\operatorname{Tr.} (U^2 - V^2),$$
 (11)

を 2×2 non-breather モードについて求める。 $\det U_0 < 0$ では, $\mathcal{X}=1$, $\mathcal{D}=0$, $\det U_0 = 0$ では, $\mathcal{X}=\mathcal{D}=0$ を得る。

注釈

- *) $\mathcal{E} = \frac{1}{\lambda_k} \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E} = \frac{1}{\lambda_k} \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E} = \frac{1}{\lambda_k} \mathcal{E} + \mathcal{E}$
- **) 求積の際に現れる積分定数を指す。

参考文献

- 1) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl. 14 (1980) 166.
- 2) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Soviet Physics JETP 47 (1978) 1017.
- 3) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Comm. Math. Phys. 74 (1980) 21.
- 4) A. Neveu and N. Papanicolaou: Comm. Math. Phys. 58 (1978) 31.
- 5) K. Pohlmeyer: Comm. Math. Phys. 46 (1976) 207.

スピン系, SU(2) - ゲージ場, 軸対称重力場方程式の関連性, ある種の厳密解と準粒子的励起

京工繊大・工芸 武 野 正 三

§ 1 Introduction

ソリトンの数理物理の面白さの一つは、広い意味でのソリトンを記述する非線型微分方程式 が、微分幾何学、一般相対論、場の理論、プラズマ物理、流体力学、格子力学、磁性体の物理 学、高分子物理、生体物理等に於て、同じ形で或は類似の形で現われることであろう。ソリト