市川芳彦

薩磨順吉（宮崎医大）

非局所非線型方程式の厳密解

12月12日（土）

三村昌泰（広大，理）

ある（生物）孤立波について

寺本英（京大，理）

生物集団社会に共通してみられる分布

松田博嗣（九大，理）

生物進化の論理

プラズマにおけるソリトン

名大・プラズマ研　市川芳彦

1. 非線形ノーマルモードとしてのソリトン

プラズマのように多数の粒子が，互いに長距離力で相互作用しながら，複雑に運動している体系については，集団運動のノーマルモードとして〝プラズモン〃と呼ばれる自由度を導入して，系の物理的性質を研究することが有効な方法として知られている。然し，このプラズモンのモードは，平面波の結合によって構成される集団座標であるから，本質的には相互作用を弱い摂動として取扱う立場と同じレベルの理論である。この事は，摂動論の漸近的な高次項の総和を求めることによって，集団運動の記述によって得られる結果が導びかれることによっても確められている。

最近，プラズマ，その他の媒質内に生ずる波動現象について，〝ソリトン〃と呼ばれる非線形な運動形態についての研究が活発に進められ，多くの自由度を持つ物理系に対する非線形ノーマルモードとしてのソリトンを，確固とした数学的基礎の上に体系的に研究することが可能になった。

ソリトンに関する理論的研究は，将来の物理学の発展に重要な影響を及ぼすと考えられる。

2. ソリトン系に対する数学的方法

1895年，浅水波の非線形伝播に対して導かれたKorteweg-de Vries 方程式が，格子振動

(Zabusky)，プラズマ内の磁気流体波 (Gardner-Morikawa)，プラズマ内のイオン音波(Washimi-Taniuti)，等，各種の波動に対して普遍的な意味を持っている標準的な方程式であることが知られ，その特殊解の一つである孤立波が ソリトンとして振舞う本質的な理由が，逆散乱の方法 (Gardner-Greene-Kruskal-Miura) によって解明されたことは，今世紀の理論物理学の大きな成果の一つであった。

G—G—K—M の逆散乱の方法が，Laxによる一般化を経て非線形 Schrödinger 方程式 (Zakh-arov-Shabat)，modified-K-dV 方程式 (Wadati) 等に対しても定式化することができることが示されたのは1970年代初頭のことであった。これらの方程式の他に， Sine-Gordon 方程式等も包括的に含む一連の非線形発展方程式に対する逆散乱法を，一般的な枠組みとして統一することに成功した Ablowitz-Kaup-Newell-Segur [1] の研究を契機として，ソリトン系に関する研究が爆発的に活発になった。

A—K—N—S の逆散乱法の枠組みは2行2列のマトリックスに対する固有値問題と，その固有関数の時間発展を定める方程式に基づくものであるが，固有値問題を3行3列のマトリックスへ拡張することにより Kaup [2] は，プラズマ内を伝播する三つの波の結合モードの非線形問題を論じ，又，2次元的ひろがりを持つイオン音波ソリトンに対する Kadomtsev-Petviashvili 方程式への逆散乱法の定式化[3] など，A—K—N—S の逆散乱法の枠組みには入らない各種の非線形発展方程式に対する研究が活発に進められている。

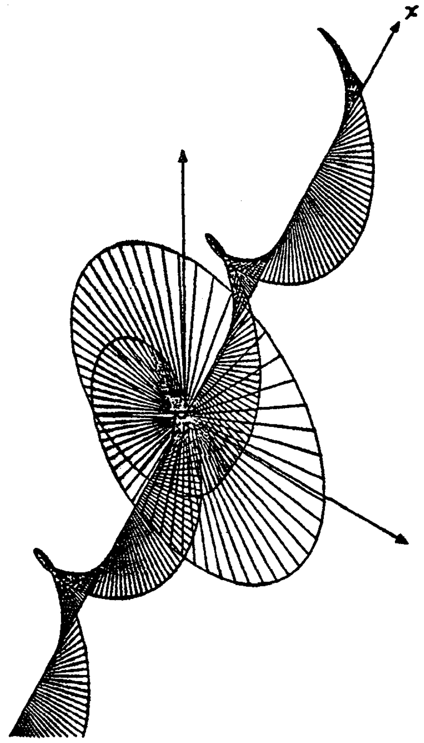
3. 2×2行列形式逆散乱法の一般化

プラズマ内には，多種多様な波動が伝播するが，特に一様な外部磁場(x-方向) に伝播する円偏光アルヘン波については，複素磁場 $q=B_y\pm \mathrm{i}\,B_z$ に対して，

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}q\pm\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}q+\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\{|q|^2 q\}=0 \tag{1}$$

という形の方程式が導かれる。1) は微分形非線形 Schrödinger 方程式と呼ばれている。我々は，[4] この方程式の定常的な孤立波解を求めたが，その代表的なものは，第1図に示すように大振幅の平面波の振幅と位相の鋭い変調が伝播する形のものである。

1) の方程式に対して， Kaup と Newell [5] は無限遠で $q\to 0$ という境界条件の下で，新しい2×2行列形式の逆散乱の枠組みを発見し，それは Kawata-Inoue [6] によって $q\to q_0\fallingdotseq 0$ の場合に一般化された。無限遠で平面波となる境界条件に対する我々の求めた弧立波解に対しては， $\xi=x\mp 2\mu t$ と座標を変換して



第１図　円偏光アルヘン派の非線形伝播

$$q = Q(\xi, t)\exp[\,\mathrm{i}(K\xi - \Omega t)],\quad Q(\xi, t) \to Q_0 \text{ at } \xi \to \infty,$$

と変形して，Q に対する方程式

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}Q \pm \mu\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}Q - \frac{K}{4}|Q|^2 Q + \frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\partial}{\partial \xi}\{|Q|^2 Q\} = 0 \qquad 2)$$

が導かれる。これは通常の３次の非線形 Schrödinger 方程式と，微分形非線形 Schrödinger 方程式の非線形項の重ね合わせになっている。

我々は,[7] A−K−N−S の逆散乱法の固有値問題を，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}u_1 + F(\lambda)u_1 = G(\lambda)q(x, t)u_2 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}u_2 - F(\lambda)u_2 = G(\lambda)r(x, t)u_1 \end{cases} \qquad 3)$$

と一般化することにより，２）に対する逆散乱法がA−K−N−S の枠組みとK−N の枠組みの線形結合として書きあらわせること，従って第１図に示した弧立波解がソリトンに他ならないことを示した。

更に，３）の形に一般化された枠組みの範囲で積分可能な非線形発展方程式の探索が行なわれ，従来のソリトン解とは様相の異なるエキゾチックな解をあたえる幾つかの方程式を発見し

た。[8] 特に

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((1+q^2)^{-3/2} q_x) = 0 \qquad 4)$$

の形の方程式は，変形の曲率が重要となる物理現象に関連するものである。4）の拡張として我々は，[9] 紐の上を伝わるループ・ソリトンに対する基礎方程式を導出したが，これは modified-K-dV 方程式のソリトン解と密接な関係をもっていることが Ishimori [10] によって示された。

4. 2次元的ソリトン

逆散乱の方法の発展によって，数学的基盤を確立したソリトンの研究も，これらの方法が空間的一次元変数の場合に限られているという大きな制約を受けている。然しながら，ソリトン物理学がこの制約を打ち破って大きく発展しようとする可能性を示す幾つかの兆候が最近顕著になってきた。

第1に，Fermi-Pasta-Ulam が一次元格子振動に対して発見した再帰現象の二次元版と看做すことのできる二次元波動の再帰現象を Yuen と Ferguson [11] は，

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial t} q + \frac{\omega_0}{2k_0}\frac{\partial}{\partial x} q\right) - \left(\frac{\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_0}{4k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) q \\ &\quad - \frac{1}{2}\omega_0 k_0^2 |q|^2 q = 0 , \end{aligned} \qquad 5)$$

という方程式に対して，数値実験によって例示している。

第2に，イオン音波に対する Kadomtsev-Petviashvili 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} q + \frac{\partial}{\partial x}(q_{xxx} + 6 q q_x) + 3\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} q = 0 , \qquad 6)$$

に対する逆散乱法の枠組みが Zakharov-Manakov によって見出されており，広田微分の方法を用いて N-ソリトン解を構成した Satsuma [12] の研究，Kako-Yajima [13] によるソリトン共鳴という新しい現象の発見など，豊富な研究成果が得られている。

第3に，プラズマ内のドリフト波に対して導かれた Hasegawa-Mima 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\phi - \phi) + v^* \frac{\partial}{\partial x}\phi - \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\phi\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta\phi = 0 , \qquad 7)$$

但し

$$\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

に対して，Larichev-Reznik によって求められた弧立渦の解析解を用いて，Makino-Kamimura-Taniuti [14] は，これらの弧立渦同士の衝突過程を数値実験によって詳しく研究した。Zabusky-Kruskal が K-dV 方程式の弧立波同士の衝突について観測した場合と全く同じように，弧立渦同士が衝突過程の前後において，それぞれの個性を保存し，〝ソリトン〃として振舞うことを発見した。

対象をプラズマに限らず，他のいろいろな問題に拡げてみると，各種の多次元的ソリトン解についての知見が蓄積されつつあるのが，最近の情勢である。

5. まとめ

プラズマにおける話題を中心として，最近の数年間のソリトンの研究の発展について展望した。§4で強調したように，２次元的ソリトン系に対する数学的方法の確立が要望されるが，そのような努力を進める上で Lamb [15] による逆散乱法の微分幾何学的意味づけについて，特に注目するべきではないであろうか？

3）の形の固有問題にまで一般化した逆散乱法の枠組みは，Lamb によれば，運動する空間曲線に対する積分可能条件に他ならない。一方，Lund-Regge [16] は，紐，渦などの運動に対する統一理論において，３次元 Euclid 空間における２次元曲面に対する Gauss-Weingarten 方程式の積分可能条件として，非線形発展方程式を求め，逆散乱法の枠組みを構成している。

このような観点に立ってみると，運動する２次元曲面の積分可能条件を定めるという立場で例えば Kadomtsev-Petviashvili 方程式に対する Zakharov-Manakov の枠組みを定式化すること，或いは Hasegawa-Mima 方程式に対する逆散乱形式の枠組みを構成すること，等が試みられるのではないであろうか？　多次元的ソリトンに関する研究は，個別的に各種の方程式に対する各論的な研究が進められているレベルにあるようであるが，散発的な努力をくりかえしても，必要な突破口は開かれず，むしろ集中的に本質的なテーマに研究努力を注入することが必要な段階に到達しているように思われる。Hasegawa-Mima 方程式に対する２次元的逆散乱の枠組みを構築することが，そのような意味で重要なテーマであるということを強調したい。

参 考 文 献

1) M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur: Stud. Appl. Math. **53** (1974) 249.
2) D. J. Kaup: Stud. Appl. Math. **55** (1976) 9.
3) V. E. Zakharov, S. V. Manakov: Theor. Math. Phys. **27** (1976) 283.
4) Y. H. Ichikawa, K. Konno, M. Wadati, H. Sanuki: J. Phys. Soc. Japan **48** (1980) 279.

5) D. J. Kaup, A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798.
6) T. Kawata, H. Inoue: J. Phys. Soc. Japan **44** (1978) 1968.
7) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **46** (1979) 1965.
8) M. Wadati, K. Konno, Y. H. Ichikawa: J. Phys. Soc. Japan **47** (1979) 1698.
9) K. Konno, Y. H. Ichikawa, M. Wadati: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 1025.
10) Y. Ishimori: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 2471.
11) H. C. Yuen, W. E. Ferguson: Phys. Fluids. **21** (1978) 2116.
12) J. Satsuma: J. Phys. Soc. Japan **40** (1976) 286.
13) F. Kako, N. Yajima: J. Phys. Soc. Japan **49** (1980) 2063.
14) M. Makino, T. Kamimura, T. Taniuti: J. Phys. Soc. Japan **50** (1981) 980.
15) G. L. Lamb, Jr.: J. Math. Phys. **18** (1977) 1964.
16) F. Lund, T. Regge: Phys. Rev. **D, 14** (1976) 1524.

Singularities of the Principal Chiral Field on $SL(N, R)$

* ランダウ理論物理研究所 *V. E. Zakharov,
*A. V. Mikhailov,
** 富山大学工学部 **川 田 勉

近年，相対論的に不変な非線形場の研究が盛んである。Zakharov 等は，[1-3] パラメータ λ を含むN次行列微分方程式，

$$\Phi_\xi = \frac{U}{1+\lambda}\Phi, \quad \Phi_\eta = \frac{V}{1-\lambda}\Phi, \tag{1}$$

により，Principal Chiral 方程式

$$(g_\eta g^{-1})_\xi + (g_\xi g^{-1})_\eta = 0, \tag{2}$$

が，逆散乱法に沿って解ける事を示した。但し，ξ，η は light-cone 座標，$\xi = (t-x)/2$，$\eta = (t+x)/2$ である。(2) は，現在迄知られている大半の2次元モデル，南部等のカイラ