

2次元系における Anderson 局在 と 超伝導

名大理 黒田 義浩

金属結晶中に、不純物等の格子欠陥が存在すると電子に寿命を与え、それが有限な残留抵抗になる。しかし、それらの結晶格子の乱れが、場合によっては、電子の伝播を著しく妨げ、実質的に電子波動関数の局在化を引き起こし、系を絶縁体として扱うことがあることを Anderson^① が指摘した。これを Anderson 局在と呼ぶ。その後も、この現象は不規則系の基本的性質の露骨の一つとして、終始研究者の関心を集めて来たが、1979年、いわゆる4人組 (Abrahams, Anderson, Licciardello & Ramakrishnan) のスケーリング則に基づいた考察^② によって、Anderson 局在の概念的な全体像が明らかにされて以来、それと関係付けるための微視理論の研究がなお一層盛んになった。現在、少なくとも、結晶格子の乱れの影響が小さい場合——「弱い局在状態」と呼ばれている——の基本的な性質は、ほぼ解明されたと言ってよい。我々のグループでは、以上のような現状認識の下に、「弱い局在」と「超伝導」の競合についての研究を行っている。この問題については、Maekawa & Fukuyama^③ の先駆的仕事があり、その後の発展も現在までのところ、彼等のグループと我々のグループの研究によるところが大きく見受けられるので、それらについて報告したい。

さて、2次元系での「Anderson 局在」と「超伝導」の競合を考えたに当たって、先づかくなる二つの定理がある。その一つは、「Dirty Superconductors に関する Anderson の定理」^④ で、これは時間反転対称性のある擾動は超伝導体の熱力学的性質と変えないことを一般的に示したものである。他の一つは、「四人組」の考察^② に基づくもので、2次元電子系では、全ての電子が $T \rightarrow 0$ の極限で Anderson 局在状態に陥るとするものである。この二つの定理は、一見、相容れないように見えるが、実際はどうか？ この素朴な疑問に答えることが我々の研究の一つの目的である。又、薄膜・層状物質等、2次元電子系としての振舞が期待される超伝導体が、いくつかの特異な性質を示すことが知られているが、それらが Anderson 局在の効果として説明できるかどうかを考えると、もう一つの目的である。

後の議論の便宜のために、先づ、常伝導相における「弱い局在」に関する微視理論の結果を簡単に復習しておく。格子の乱れの原因として、以下では、次のような不純物ポテンシアルによる散乱を考慮することにする。

$$\mathcal{H}_{\text{imp}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{q}} V_{\text{imp}}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_i} a_{\mathbf{p},\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\sigma}, \quad \text{----- (1)}$$

ここで、 \mathbf{R}_i は不純物の位置ベクトルであり、 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ は電子の生成演算子である。Born 散乱による Self-energy は、電子の寿命 $2\tau_0 \equiv (\pi n_i \rho_F |V_{\text{imp}}|^2)^{-1}$ (n_i は不純物の数密度、 ρ_F は

Fermi面での状態密度)を与えよ。この効果を含んだ
 1粒子 Green 関数を $G^{(0)}(p, \epsilon)$ と置く。同じ近似の
 範囲内での電気伝導度は、久保公式を用いよ。
 図1(a),(c)にあるような点線(不純物散乱 $U_0 \equiv n_i V_{imp}$
 を表わす)についてハシゴ型の diagrams を集めよ
 ばよく、結果は良く知られた $\sigma_0 = ne^2 \tau_{tr}/m$ で与
 えられる。この以外の diagrams からの寄与は、

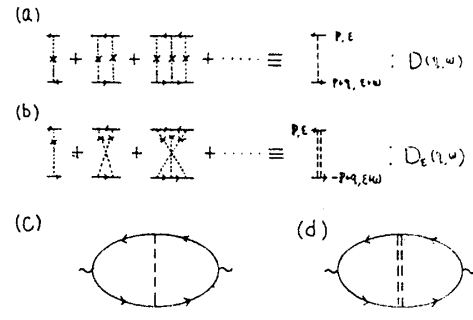


図 1

$(1/\epsilon_F \tau_0) \ll 1$ (ϵ_F は Fermi energy) について
 高次の補正項を与えよ。しかし、図1(b)(d)のように、

点線が互に完全に交錯し合った diagrams (mostly crossed diagrams) の和は、電気
 伝導度に $\Delta\sigma_L(\omega) = -\ln(1/\omega\tau_0)/2\pi\epsilon_F\tau_0$ のような特異な ω -依存性を持つ補正項を
 与えることが判った。^⑤ これは、図1(b)で与えられる電子-電子散乱 $D_e(q, \omega)$ が

$$D_e(q, \omega) \simeq [2\pi g_F \tau_0^2 (D_0 q^2 + |\omega|)]^{-1} \text{ (for } \epsilon \cdot (\epsilon + \omega) < 0, (1/\tau_0) \gg v_F q, |\omega|) \text{ --- (2)}$$

のように diffusion 型で与えられることによる。ただし、diffusion const. D_0 は、
 2次元系の場合 ($\epsilon_F \tau_0/m$) で与えられる。非弾性散乱による電子の寿命 τ_e の効果を考慮す
 ると、(2)式中、 $|\omega|$ は $|\omega| + 1/\tau_e$ で置き替えられる。 τ_e が $T \rightarrow 0$ の極限で T^{-p} ($p > 0$) のよ
 うに振舞うとすると、結局、 $|\omega|\tau_e \ll 1$ の極限で $\Delta\sigma_L = -p \ln(1/\tau_e T)/2\pi\epsilon_F\tau_0$ となる。

以上は、単純な不純物のみによる散乱の効果を考えても
 のであるが、実際の系では電子間相互作用の効果も考
 える必要があり、それらが不純物散乱によって補正を受け
 ることを通じて生じるものもある。それらの中、最も重
 要なものは、図2にあるような Self-energy corrections
 とそれらから派生する vertex corrections からの寄与で
 ある。^{⑥, ⑦} それを $\Delta\sigma_I$ とすると、 $(\Delta\sigma_I/\sigma_0) = -(g_1 + g_2 + 2g_3 - 2g_4) \ln(1/\tau_e T)/2\pi\epsilon_F\tau_0$
 で与えられる。^⑦

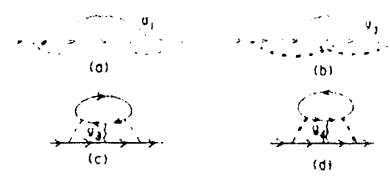


図 2

さて、本題に移って、これから、Anderson局在効果と超伝導の競合について考
 へることになる。だが、弱い局在の効果^⑧が超伝導遷移温度 T_c へ与える影響を調べ
 てみよう。ここでは、Takagi & Kuroda の手法に従うことにして、モデルとして通常の
 BCS モデルに(1)式で与えられる不純物ポテンシャルによる散乱を含めたものを考える。

T_c を定めるためには、Off Diagonal Susceptibility $\chi \equiv \int dt \int dt' \langle T_\tau [\tilde{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}, t) \tilde{\Psi}_\downarrow^\dagger(0,0) \tilde{\Psi}_\uparrow^\dagger(0,0)] \rangle$ の発散点を求めればよい。ところで、電子-電子散乱の irreducible vertex U を shortrange instantaneous attraction g_{BCS} と残りの部分 \tilde{U} に分割して、

$$\tilde{K}(p, \epsilon) = G(p, \epsilon) G(-p, -\epsilon) [1 + T \sum_{p', \epsilon'} \tilde{U}(p, \epsilon; p', \epsilon') \tilde{K}(p', \epsilon')], \text{ --- (3)}$$

と満足する有効2粒子 Green's 関数 \tilde{K} を導入すると、 T_c を定める条件は、

$$1 + g_{BCS} \cdot T \sum_{p, \epsilon} \tilde{K}(p, \epsilon) = 0$$

で与えられる。結局、 \tilde{K} を求めればよいことになるが、 R の具体的な計算のためには、
 1粒子 Green関数 $G(p, \epsilon) = [i\epsilon - \xi_p - \Sigma(p, \epsilon)]^{-1}$ に関する次の二つの恒等式が大きい
 に役立つ。

$$G(p, \epsilon) G(-p, -\epsilon) = -\Delta G(p, \epsilon) / [2i\epsilon - \Sigma(p, \epsilon) + \Sigma(-p, -\epsilon)], \quad \text{---- (4)}$$

$$\Sigma(p, \epsilon) - \Sigma(-p, -\epsilon) = T \sum_{p', \epsilon'} \Delta G(p', \epsilon') \tilde{U}(p', \epsilon'; p, \epsilon), \quad \text{---- (5)}$$

ただし、 $\Delta G(p, \epsilon) \equiv G(p, \epsilon) - G(-p, -\epsilon)$ 。(5)式は、一種の Ward-Takahashi 恒等式
 であり、詳しい導出方法については、Ref. ⑧を参照されたい。(4)式と(5)式を用いると(2)式
 は、次のように書き直される。

$$\tilde{K}(p, \epsilon) = -\frac{\Delta G(p, \epsilon)}{2i\epsilon} + \frac{F(p, \epsilon)}{2i\epsilon}, \quad \text{---- (6)}$$

$$\text{ただし、} F(p, \epsilon) \equiv T \sum_{p', \epsilon'} [\Delta G(p', \epsilon') \tilde{U}(p', \epsilon'; p, \epsilon) \tilde{K}(p, \epsilon) - \Delta G(p, \epsilon) \tilde{U}(p, \epsilon; p', \epsilon') \tilde{K}(p', \epsilon')]. \quad \text{---- (7)}$$

従って、 T_c を定める条件は、

$$-\frac{1}{g_{BCS}} = T \sum_{p, \epsilon} \left[-\frac{\Delta G(p, \epsilon)}{2i\epsilon} + \frac{1}{2i\epsilon} F(p, \epsilon) \right] \quad \text{---- (8)}$$

で与えられる。右辺第一項のみをとれば、 $\sum_p \Delta G(p, \epsilon) = -2\pi i N(\epsilon) \text{sgn} \epsilon$ (ただし、 $N(\epsilon)$ は全ての
 補正を考慮した1粒子状態密度)の関係が成り立つので、Andersonの定理^④で述べられているよ
 うに1粒子状態のエネルギー分布のみで定まる $T_c = T_c^{(0)} + \delta T_c^{(1)}$ (ただし、 $T_c^{(0)}$ は pure系での T_c)
 を与えることが判る。即ち、 $F(p, \epsilon)$ の効果は、Andersonの定理からのずれを表わしている
 ことになる。さて、 F の具体的な形を知るためには、 \tilde{U} の具体的な形を考へる必要がある。
 以下のように、二つの場合に分けて考へる。

(a) \tilde{U} が不純物散乱のみを含む場合： この場合には、 $\tilde{U}(p, \epsilon; p', \epsilon')$ は一般的に $\delta_{\epsilon, \epsilon'}$
 に比例した形になる。これを(7)式に代入すると、 $\sum_p F(p, \epsilon) = 0$ となることが判る。従って、
 (8)式より Andersonの定理からのずれはない。

(b) \tilde{U} が不純物散乱と電子間相互作用の両方を含む場合： この場合には、 \tilde{U} は $\delta_{\epsilon, \epsilon'}$
 に比例する部分 \tilde{U}_1 と残りの部分 \tilde{U}_2 に分割され、 \tilde{U}_1 については(a)の場合と全く同様にな
 る。又、 \tilde{U}_2 は、Born散乱項 U_0 に比して $O(1/g_F T_c)$ の量であり、 $(1/g_F T_c) \ll 1$ として、摂動
 展開が使える。今、 $O(1/g_F T_c)$ の補正項のみに注目すると、

$$\sum_p F(p, \epsilon) = -\sum_p \sum_{p'} T \sum_{\epsilon'} \left[\Delta G^{(0)}(p', \epsilon') \tilde{U}_2(p', \epsilon'; p, \epsilon) \frac{\Delta G^{(0)}(p, \epsilon)}{2i\epsilon} - \Delta G^{(0)}(p, \epsilon) \tilde{U}_2(p, \epsilon; p', \epsilon') \frac{\Delta G^{(0)}(p', \epsilon')}{2i\epsilon'} \right],$$

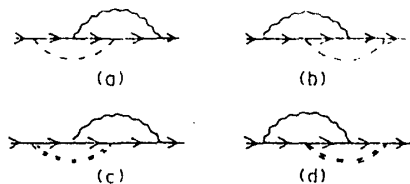


図 3

を得る。さて、 \tilde{U}_2 の具体的な形を考へるに当って、「弱い
 局在の領域で最も特異性の強いもののみを採ることとする
 と、先づ考へられるのは、常伝導相で最も重要であった
 図2に与えられているような Self-energy Corrections とそれらから派生する (W-T 恒等式)

(5)を満足する) Vertex Corrections である。しかし、これは、W-T 恒等式と導く過程と同様の考察 (詳しくは、Ref. ⑧を参照) を行ない、(2)式と導く条件 $\varepsilon(\varepsilon + w) < 0$ を与え合わせる。具体的な計算を行うことなく $O(1/\epsilon_{FT_0})$ までの近似では無視出来ることが判る。結局、超伝導状態で最も重要な Anderson 局在の効果は、図 3 に与えられる Self-energy Corrections とそこから派生する Vertex Corrections からの寄与であることが判る。^{⑥, ⑦} その結果、 T_c を定める条件は、 $[\ln(1/T_0)]^2 / \epsilon_{FT_0} \ll 1$ の時、

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_c^{(0)}}\right) = -\frac{\tilde{g}}{4\pi\epsilon_{FT_0}} [\ln(1/T_0)]^2 - \frac{g}{6\pi\epsilon_{FT_0}} [\ln(1/T_0)]^3, \quad \text{----- (9)}$$

で与えられる。ただし、 $\tilde{g} \equiv g_c - 3g_{BCS}$, $g \equiv g_c + g_{BCS}$ で、 g_c 及び g_{BCS} は、夫々、 γ -ロン反発力及び BCS 引力を表わすものとする。(9)式中、右辺の第一項は状態密度への Anderson 局在の効果^{⑥, ⑦} から来るもので、今の近似の範囲内では重要ではないので、以下の議論では無視することにする。(9)式は、形式的には二つの解を持つ。すなわち、 $T_c^{(1)} \approx T_c^{(0)} [1 - \frac{g}{6\pi\epsilon_{FT_0}} \{\ln(1/T_0)\}^3]$ と $T_c^{(2)} \approx (1/T_0) \exp[-6\pi\epsilon_{FT_0}/g]$ である。たゞ、後の方の解 $T_c^{(2)}$ は、今の近似の適用範囲を超えているので、額面通りにうける訳には行かないが、それが実験的に観測されている超伝導相から常伝導相への再入 (re-entrance) 現象^⑩ の特徴点である可能性があることが Maekawa & Fukuyama^③ によって指摘された。(実際には、Maekawa & Fukuyama の最初の論文^③ では計算違いがあり、その後、訂正された(9)式と同じ結果を導いた。) しかし、後に示すように、現在では、 $T_c^{(2)}$ が再入現象と直接関係のないことが明らかにされている。高い方の解 $T_c^{(1)}$ の表式は、こゝまでの薄膜の T_c が mean free path の大きさに依るといふ実験結果^⑪ を定性的に説明する。

さて、次に T_c より低温側での Anderson 局在の効果とみてみよう。先づ、 T_c の近傍では、 T_c の計算で用いたと同様の手法 (公式④と⑤をフルに活用する) を駆使して、GL 方程式と導くことが出来る。^⑫ その結果は、 $[\ln(1/T_0)]^2 / \epsilon_{FT_0} \ll 1$ の領域で以下のようになる。

$$A \Delta(T) - B |\Delta(T)|^2 \Delta(T) + C \frac{\partial^2}{\partial T^2} \Delta(T) = 0,$$

ただし、

$$\left\{ \begin{aligned} A &= g_F \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) \left[1 - \frac{g}{6\pi\epsilon_{FT_0}} \left\{ [\ln\left(\frac{1}{T_0}\right)]^2 + \ln\left(\frac{1}{T_0}\right) \ln\left(\frac{1}{T_0}\right) + [\ln\left(\frac{1}{T_0}\right)]^3 \right\} \right], \\ B &= B_{BCS} \left[1 - \frac{g}{\pi\epsilon_{FT_0}} [\ln\left(\frac{1}{T_0}\right)]^2 \right], \quad \left(B_{BCS} = \frac{7\zeta(3)g_F}{8\pi^2 T^2} \right) \\ C &= C_{BCS} \left[1 - \frac{g}{2\pi\epsilon_{FT_0}} [\ln\left(\frac{1}{T_0}\right)]^2 - \frac{1}{2\pi\epsilon_{FT_0}} \ln\left(\frac{1}{T_0}\right) \right], \quad \left(C_{BCS} = \frac{\pi g_F D_0}{8T} \right). \end{aligned} \right.$$

こゝらの結果より、 $|\Delta|^2 = (A/B) \approx \Delta_{BCS}^2 [1 + O((g/\epsilon_{FT_0}) \ln(1/T_0)^2)]$ ($\Delta_{BCS}^2 \equiv (8\pi^2 T^2 / 7\zeta(3)) \ln(T_0/T)$), $H_{c2} = (\hbar/2e)(A/C) \approx H_{c2}^{BCS} [1 + \ln(1/T_0) / 2\pi\epsilon_{FT_0}]$ ($H_{c2}^{BCS} \equiv (4cT/\pi e D_0) \ln(T_0/T)$) を得る。 H_{c2} が低温で BCS 理論の値より上方にうつかる現象は層状物質^⑬ で以前知られていたが、こゝらが Anderson 局在の効果として説明される可能性もある。^⑭ 最近、薄膜においても同様の現象が観測された。^⑮ さて、係数 $A=0$ の条件は、当然ながら (9)式を与える。又、上に得られた結果を強引に低温領域まで適用すると、係数 B が零になる温度 T_B が存在することが判る。今、 $T_c^{(1)}$, $T_c^{(2)}$ 及び T_B の $(1/T_0)$ -依存性の定性的な振舞いを図示してみると図 4 のようになる。高温側より温度を下げて行く

時に観測される相転移の様子は、 $(1/T_0)$ の大きさの違いによって三つの異ったタイプに分類される。 $(1/T_0)$ の大きさについて分類した各領域ごとの相転移の様子を概念図にしてみると図5のようになる。これらの結果より、 $T_c^{(1)}$ が再入現象の転移点を表わすものではないこと、又、仮に再入現象が起きるとしても、それは二次転移ではありえないことがほぼ明らかになった。ただ、先にも断ったように、 $T_c^{(2)}$ 及び T_B の表式は今の近似の適用範囲を超えたものになっている。従って、完全に断定的な結論を導くためには、 $O([\ln(1/T_0)]^2/GFT_0) \sim 1$ まで適用出来るような表式を導く必要がある。

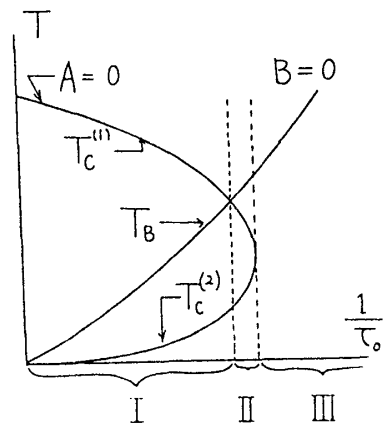


図 4

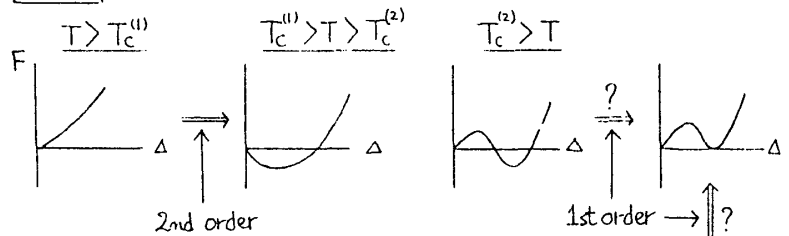
さて、 T_c よりもずっと低温になると、どうなるのであろうか？この場合についても、弱い局在の極限に属する限り、これまでと同様、厳密な議論を行うことが出来る。

Matrix表示 (Nambu表示) の Green関数を用いた場合は、基本的には、図3にあると同様の Self-energy Corrections が最も重要であることが判る。結局、 $\text{Min}[\ln(1/2\alpha_0)/GFT_0, \ln(1/T_0)/GFT_0] \ll 1$ の条件下で、次のような Gap 方程式が得られる。

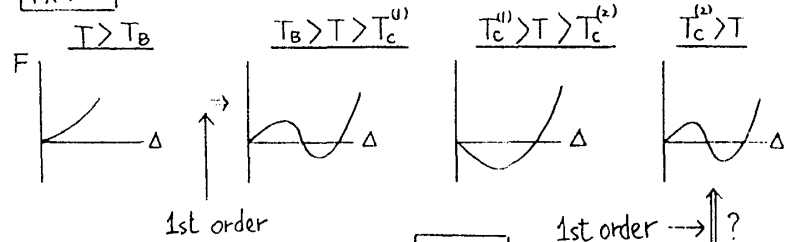
$$-\frac{1}{g_{0S}} = \pi T \sum_{\epsilon} \left[\frac{1}{E} + \frac{g}{2G T_0} T \sum_{\epsilon'} \frac{\epsilon'^2}{E'^3 E} \ln|(E+E')T_0| \right],$$

ただし、 $E \equiv \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$, $E' \equiv \sqrt{\epsilon'^2 + \Delta^2}$ である。この Gap 方程式を数値的に解いてみると、 $T_c^{(1)}$ より低温側で二つの解 Δ_1, Δ_2 を持つことが判った。これらの数値解の温度依存性について概念図を描いてみると図6のようになる。 $T_c^{(2)}$ の場合と同様、 Δ_2 の値は、今の近似の範囲を超えている。GL方程式の結果と考合せれば、 Δ_1 が Free energy の Minimum に対応し、 Δ_2 は Maximum に対応していることは明らかである。「弱い局在」の領域に属する限り、 Δ_1 は常に近似の適用範囲内にあり、

領域 I



領域 II



領域 III

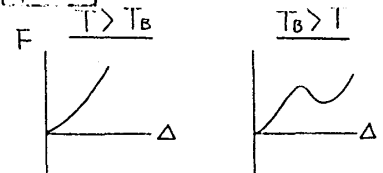


図 5

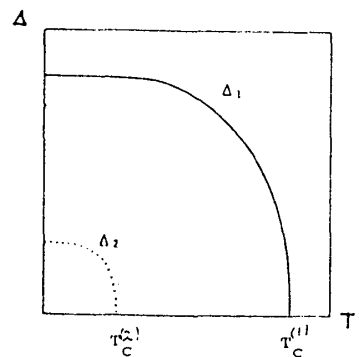


図 6

この結果は、絶対零度まで超伝導状態が安定に存在していることを示している。これは、GL方程式の結果より導いた再入現象とAnderson局在効果の関係を完全に裏付けるものである。一方、実際に観測されている再入現象が、いかにも二次転移的であることを思えば、結局、Anderson局在効果のみでそのらの実験事実を説明するのは無理があるように思われる。

結局、これまでの結果を一言にまとめると、「Anderson局在効果は、著しく超伝導現象を起し難くするが、一旦、超伝導状態が生じると、それは絶対零度まで安定(少なくとも準安定状態として)に存在する」と結論される。

References

- 1) P.W. Anderson, Phys. Rev. 109 (1958), 1492.
- 2) E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello and T.V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Letters 42 (1979), 673.
- 3) S. Maekawa and H. Fukuyama, Proceedings of the 16th International Conference on Low Temperature Physics (Physica 107 B+C (1981), 123).
- 4) P.W. Anderson, J. Phys. Chem. Solids 11 (1959), 26.
- 5) L.P. Gor'kov, A.I. Larkin and D.E. Khmel'nitzkii, JETP Letters 44 (1979), 248.
- 6) B.L. Altshuler, A.G. Aronov and P.A. Lee, Phys. Rev. Letters 44 (1980), 1288.
B.L. Altshuler, D. Khmel'nitzkii, A.I. Larkin and P.A. Lee, Phys. Rev. B22 (1980), 5142.
- 7) H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Japan 48 (1980), 2169.
- 8) H. Takagi and Y. Kuroda, Solid State Commun. 41 (1982), 643.
- 9) S. Maekawa and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Japan 51 (1982), 1380.
- 10) S. Kobayashi, Y. Tada and W. Sasaki, Physica 107B (1981), 129.
- 11) M. Strongin, R.S. Thompson, O.F. Kammerer, and J.E. Crow, Phys. Rev. B1 (1970), 1078; D.G. Naugle, R.E. Glover, and W. Moormann, Physica 55 (1971) 250;
T. Kawaguti and Y. Shibuya, J. Low Temp. Phys. 17 (1974), 143.
- 12) H. Takagi, R. Souda and Y. Kuroda, Prog. Theor. Phys. 68 (1982), 426.
- 13) J.A. Woolam and R.B. Somoano, Phys. Rev. 13 (1976), 3843; M. Ikebe, K. Katagiri and Y. Muto, Physica 107B (1981), 943.
- 14) S. Maekawa, H. Ebisawa and H. Fukuyama, J. Phys. Soc. Japan 52 (1983), No.4.
- 15) S. Kobayashi, S. Okuma, F. Komori and W. Sasaki, to appear in J. Phys. Soc. Japan.
- 16) H. Takagi and Y. Kuroda, to be published in Prog. Theor. Phys.