アンダーソン局在とくりこみ群

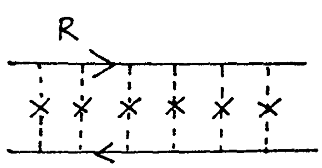
東大教養基礎科学科　氷上　忍

1. はじめに

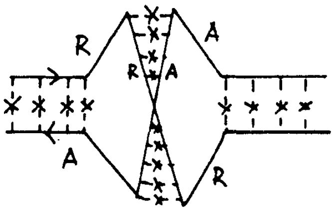
不純物散乱による電子の局在化の問題は，二次元が臨界次元数になるという考察に基づき，くりこみ群によって理論的に研究され，また多くの実験結果との比較が行なわれてきた。理論的には，まず金属相から出発し，拡散モードの自分自身との相互作用を摂動論で計算し，それが金属相の不安定性を引起こすことを調べるアプローチがある程度成果があったと思われる。この方法が有効である為には，くりこみ群が使えることが条件であり，また高次の項についても予測がつかなくては定量的な事が議論できないと思われる。最近，この問題の持つ対称性を見直してみて，微分幾何学的方法で4次の項 $O\left(\frac{1}{(E_F\tau)^4}\right)$ まで計算出来たので[1]，以下その事を中心に述べてみたい。

2. 拡散に対する有効ハミルトニアン

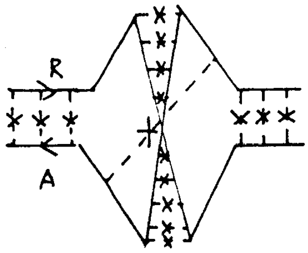
電子と空孔を表わす retarded Green function と advanced Green function, G_R と G_A による梯子型ダイアグラムにより通常の拡散モード $(D_0q^2-i\omega)^{-1}$ が得られるのはよく知られた事である。D_0 は裸の拡散定数で $E_F\tau$ に等しい。不純物での散乱はボルン近似で，エネルギーと運動量は保存されるが，G_R と G_A との間にはエネルギーのやりとりは無く ただ運動量のやりとりがあるとする。図(0)はこの梯子型ダイアグラムで，この補正として図(1-a),(1-b),(1-c)が有り，その大きさは図(0)に較べて $1/E_F\tau$ だけ小さい。



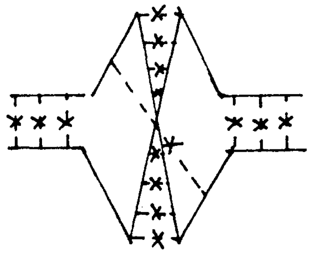
(0)



(1−a)



(1−b)

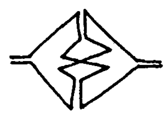


(1−c)

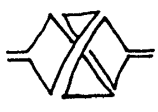
図(1-a), (1-b), (1-c)を考えた一次のオーダーでは $D = D_0\left(1-\frac{\hbar}{2\pi E_F \tau}\ln\frac{1}{\omega\tau}\right)$ となる。[2),3)] 二次のオーダーではさらに次のダイアグラムが有る。[4)]

(2−a)

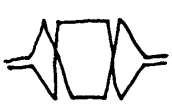
(2−b)



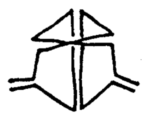
(2−c)



(2−d)



(2−e)



(2−f)

三次, 四次のダイアグラムはさらに数が多くなり, 四次は数百の数のダイアグラムがある. 計算も非常な労力を必要とする. しかしながら, 対称性の考察から四次までの拡散係数Dが簡易な方法で計算できる. その方法は拡散モードの相互作用を表わす有効ハミルトニアンを導出し, その幾何学的性質を考えることによる. 実際この方法により三次までは前に考えられたが[4),5)]さらに新しい関係式が見出されたので四次まで可能になった。図(1-a)〜(2-f)で二重線は $(D_0 q^2 - i\omega)^{-1}$ を表わし, 二重線以外は二重線の足の数を n とすると n 点vertexが残る。一次のオーダーでは4点vertexが, 二次のオーダーでは6点vertex((2-d), (2-e), (2-f))が, 三次のオーダーでは8点vertexが, 四次のオーダーでは10点vertexが表われる. 4点vertexの足の運動量を $q_1, \cdots, q_4$ とすると

$$V_4(\vec{q}_1, \cdots \vec{q}_4) = D_0 \tau^4 \left[-2\left(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_3 + \vec{q}_2\cdot\vec{q}_4\right) - (\vec{q}_1+\vec{q}_3)\cdot(\vec{q}_2+\vec{q}_4) \right]$$

6点vertexは

$$V_6(\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_6) = D_0 \tau^6 \Big[2\left(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2 + \vec{q}_2\cdot\vec{q}_3 + \cdots + \vec{q}_6\cdot\vec{q}_1\right) + 4\left(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_3 + \vec{q}_2\cdot\vec{q}_4 + \cdots + \vec{q}_6\cdot\vec{q}_2\right) + 4\left(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_4 + \vec{q}_2\cdot\vec{q}_5 + \vec{q}_3\cdot\vec{q}_6\right) \Big]$$

と補正を入れて計算される．このような $V_{2n}(\vec{q}_1, \cdots \vec{q}_{2n})$ を自動的に導出する簡便な模型として，二次元の相転移の模型として有名な非線型シグマ模型の一般化を考える．磁性体のハイゼンベルク模型やXY模型，イジング模型あるいは超伝導模型はこのシグマ模型に含められる．ハミルトニアン密度は次の式で与えられる．

$$H = \frac{1}{2t}\, tr\,(\partial_\mu V)(\partial_\mu V) \qquad \cdots\cdots (1)$$

ここで tr は V が $2n \times 2n$ のマトリックスの形をしているのでトレースを取ることを意味し，t は $1/E_F\tau$ を表わす．∂_μ は d 次元空間での微分．マトリックス V は次の様に書けるという条件がついている．

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\phi\,{}^t\phi} & i\phi \\ i\,{}^t\phi & \sqrt{1+{}^t\phi\,\phi} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここで ϕ は $n\times n$ のマトリックスで i は純虚数．${}^t\phi$ は $\phi_{i\alpha}$ の i と α を入れ替えたものである．(2)を(1)に代入すると

$$H = -\frac{1}{2t}\Big(\sum q^2 \phi_{i\alpha}(q)\,\phi_{i\alpha}(-q) - \frac{1}{2}\sum V_4(q_1,\cdots q_4)\,\phi_{i\alpha}(q_1)\,\phi_{\alpha j}(q_2)\,\phi_{j\beta}(q_3)\,\phi_{\beta i}(q_4)$$
$$- \frac{1}{3}\sum V_6\, \phi_{i\alpha}(q_1)\,\phi_{\alpha j}(q_2)\,\phi_{j\beta}(q_3)\,\phi_{\beta k}(q_4)\,\phi_{k\gamma}(q_5)\,\phi_{\gamma i}(q_6) + \cdots \Big)$$

と無限に続く項の和になる．いうまでもなく．V_4 や V_6 は前ページの V_4, V_6 に等しい．$\phi_{i\alpha}$ の i と α は電子と空孔に対するサフィックスで，$i=1\cdots n$，$\alpha=1\cdots n$ とすると，摂動論では電子，空孔が一本づつダイアグラムに表われた事に対応して，$n\to 0$ の極限をとる．

くりこみ群の方法とは，無限大の発散が出てくるのを，今の場合 $\ln N/\omega\tau$ であるが，くりこみ定数に吸収して有限な結果を得る方法で，特に高次の項の計算には単純な運動量の切断 Λ ではうまく行かず，次元正則化法と呼ばれる一般次元数で計算し，$1/(d-2)$ のポールをくりこむ方法が適当であることが知られている．実際に(1)のハミルトニアンをこの方法で二次まで計算するのは容易であるが，四次まではダイアグラムの数が多すぎて不適当である．(1)のハミルトニアンは

性質の良い形をしていて，数学的には今世紀始めに E. Cartan によって研究された対称空間に属する。その為，数多くの同値(isomorphism)関係が存在し，その幾何学的関係式から，くりこみ群関数（β-函数）を決定することができる。特にスピンに依らない普通のアンダーソン局在の場合とスピン軌道相互作用が強い場合とでは完全に逆の関係にあることが解る。くりこまれる D はくりこむ時の規準の運動量 μ に依らないことから

$$\mu \frac{d}{d\mu} D = 0$$

これを D が t と μ，ω の函数であることより次の微分方程式を得る

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\beta(t)}{t} - (d-2) \right)(-i\omega t) \frac{\partial}{\partial(-i\omega t)} \right\} D(t, \mu, \omega) = 0$$

ここで $\beta(t)$ はベーター函数で，4次までの結果で次のようになる。

$$\beta(t) \equiv \mu \frac{\partial t}{\partial \mu} = (d-2)t - 2t^2 + 0t^3 + 0t^4 + 0t^5 + O(t^6)$$

幾何学的方法はこの $\beta(t)$-函数の係数を決定するのに簡便な方法と言えよう。上の微分方程式の解は二次元では $(d=2)$，

$$D \exp\left(D - \frac{1}{t}\right) = -\frac{i\omega}{\mu^2}$$

で，この式は4次のオーダーまで正しい事になる。

参考文献

1) S. Hikami, Nuclear Physics B215 [FS7] (1983) 555

2) E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan P. R. L. 42 (1979) 673

3) L. P. Gorkov, A. I. Larkin and D. E. Khmelnitskii, Sov. Phys. JETP Lett. 43 (1979) 228

4) S. Hikami, Phys. Rev. B 24 (1981) 2671

5) S. Hikami, Prog. Theor. Phys. 64 (1980) 1466.