Title	一次元カオスにおける臨界現象とスケーリング則(強い相関をもつゆらぎの統計物理学,科研費研究会報告)
Author(s)	吉田, 健
Citation	物性研究 (1983), 40(5): 57-63
Issue Date	1983-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91107
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

一次元カオスにおける臨界現象とスケーリング則

九大理　吉田　健

§1. はじめに

区間Jからそれ自身への写像をfとする．fによって生成される一次元の離散過程

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

の長時間の振舞がここでの考察の対象である。$x_0, x_1, x_2, \cdots$ を軌道と呼ぶ。$1 \leqq n < P$ で $f^{(n)}(x_0) \neq x_0$，$f^{(P)}(x_0) = x_0$ となるとき，P周期軌道という。$P=1$ は(1)の定常解を表わし，写像fの固定点である。

放物線の最大値をひとつもつ写像（logistic model）

$$f(x) = ax(1-x), \qquad x \in J = [0, 1] \qquad (0 \leqq a \leqq 4) \tag{2}$$

では，制御パラメターaを大きくしていくと，アトラクターが固定点→2周期軌道→4周期軌道→…と変わっていく一連の周期倍化分岐が起こる。[1] 2^{m-1}周期アトラクターから2^m周期アトラクターへの分岐点をa_mと書く。たとえば，$a_1=3$，$a_2 = 1+\sqrt{6}$．数値実験によると $a_c = \lim_{m\to\infty} a_m = 3.56994566\cdots$ となる．$a_c < a \leqq 4$ では，「窓」と呼ばれる（周期アトラクターが現われる）aの領域を除けば，アトラクターはJ内のひとつの部分区間または部分区間の和集合となり，カオスが実現している。[1),2)] もう少し詳しくいうと，$a=4$ ではJの全区間であるアトラクターが，aを小さくしていくと，2個，4個，8個，…の部分区間に分離していく。これをバンド分離と呼ぶ。2^{m-1}バンドから2^mバンドへの分離点を$\bar{a}_m$と記す．$\bar{a}_m$の集積点は上記のa_cに一致する．丁度$a=\bar{a}_m$では，2^m個のバンド間を渡り歩く循環運動の成分もあるが，バンド内の過程はカオスであり，全体としてやはりカオスにある．実際，

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|\frac{d}{dx} f^{(n)}(x)\right| \tag{3}$$

で定義されるLyapunov指数は$a=\bar{a}_m$で正である．こうして，aがa_cを越えたところでは，詳細にみれば「窓」もたくさんあるが，カオスの領域も必ずある．a_cはこの意味でカオスと非カオス領域の間の臨界点である．

Feigenbaumは，周期倍化分岐を経てのカオス出現において

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{a_m - a_{m-1}}{a_{m+1} - a_m} = 4.669\cdots \tag{4}$$

なる定数δの（ある範囲内での）普遍性と，[3)] パワースペクトルの強度について

$$\frac{\phi(m)}{\phi(m+1)} = \mu^2 = 普遍定数 \tag{5}$$

というスケーリング則があることを主張した。[4)] ここで，$\phi(m)$はaがa_mを通過するごとに現われる2^{m-1}個の振動数$\omega = 2\pi(2k+1)/2^m$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 2^{m-1}-1)$成分の平均強度

である．Feigenbaum の rescaling factor $\alpha = 2.5029\cdots$[3] を使うと

$$\mu = \left[\frac{4\alpha^4}{1+\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 4.648\cdots \tag{6}$$

となる．*)

Bénard 対流における乱流発生の道筋を追求する実験が最近いくつかのグループで行なわれ，Rayleigh数を大きくしていくとき 2^5ぐらいまでの周期倍化分岐が観測されている．例えば Libchaber 達の実験[6]によると $\delta = 4.4 \pm 0.1$，$\mu \simeq 5$ であり，一次元写像による予測値に近い．このことは一次元離散時間系の重要性を端的に示している．

ここでは，解析的に厳密に取り扱える一次元写像の簡単なモデルをとり，系がカオスを呈する制御パラメターの全域にわたってそのカオスの構造を解明し，カオス側からの臨界現象を調べるのが目的である．

§2．モデル

(1)式の f としてテント変換

$$f(x) = \begin{cases} a x & (0 \leqq x < \frac{1}{2}) \\ a(1-x) & (\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1) \end{cases} \qquad (0 < a \leqq 2) \tag{7}$$

をとり上げる．a は制御パラメターで，$0 < a < 1$ ではすべての軌道は $x = 0$ に引き寄せられる．周期倍化分岐は1点 $a = 1$ に縮退している．$1 < a \leqq 2$ では，初期点がある小区間内に分布しているとき，その引き伸ばしと折りたたみの過程を含み，長時間で見てカオスを呈する．「窓」は全くない．このカオスの構造を非周期軌道の時間相関関数とそのパワースペクトルを解析的に厳密に求めることによって調べる．なお，系はエルゴード的で絶対連続の不変測度をもつ．あとで，β変換とその変形についても少しふれる．

§3．カオスの中の秩序運動 — 相関関数計算の要点

不変測度の密度関数（＝滞在確率の密度）$\rho(x)$ は Frobenius - Perron operator $\mathcal{H}$ の固有値1に属する固有関数である：[2]

$$\mathcal{H}\rho(x) = \rho(x). \tag{8}$$

$$\mathcal{H}F(x) \equiv \int_J dy\, F(y)\,\delta(f(y)-x). \tag{9}$$

この $\mathcal{H}$ と $\rho(x)$ を使って，時間相関関数は

$$C(n) \equiv \langle f^{(n)}(x)\cdot x\rangle - \langle x\rangle^2 \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{10}$$

$$\langle f^{(n)}(x)\cdot x\rangle \equiv \int_J f^{(n)}(x)\, x\, \rho(x)\, dx = \int_J x\, \mathcal{H}^n\{x\rho(x)\}\, dx \tag{11}$$

と書ける．

---

*) Feigenbaum[4]によると $\mu = 4\alpha/[2(1+1/\alpha^2)]^{1/2} = 6.57\cdots$ であるが，これは(5)式の $\phi(m)$ のとり方が違うためで，$\phi(m)$ を本文のように定義すると(6)となる．Nauenberg and Rudnick[5]は本文で定義した $\phi(m)$ で数値的に $\mu = 4.58\cdots$ を得ている．

カオスの中にはたくさんの不安定周期軌道が埋まっているが，そのうち特定のタイプの周期軌道に着目すると，非周期軌道の集団運動が簡単にとり出せる制御パラメターの無限列を得る．テント変換では Sarkovskii の順序

$$3 \vdash 5 \vdash 7 \vdash 9 \vdash \cdots \vdash 3\times2 \vdash 5\times2 \vdash 7\times2 \vdash 9\times2 \vdash \cdots \vdash 3\times2^m \vdash 5\times2^m \vdash 7\times2^m \vdash 9\times2^m \vdash \cdots \cdots \vdash 2^m \vdash \cdots \vdash 8 \vdash 4 \vdash 2 \vdash 1 \tag{12}$$

に対応する制御パラメター a の無限列がそれである．(12)で $k \vdash l$ は k 周期軌道が存在すれば l 周期軌道も存在していることを表わす． a を下げていくとき， $a = b_3, b_5, b_7, \cdots$ $(2 > b_3 > b_5 > b_7 \cdots)$ で順々にあるタイプの 3, 5, 7, … 周期軌道が，従ってすべての 3, 5, 7, … 周期軌道が消滅してゆき，3以上のすべての奇数周期軌道が消滅する点が最初のバンド分離点 $\bar{a}_1$ である．同様に， 2^m バンドの状態で， $a = b_{m3}, b_{m5}, b_{m7}, \cdots$ $(\bar{a}_m > b_{m3} > b_{m5} > b_{m7} > \cdots)$ で 3×2^m, 5×2^m, 7×2^m, … 周期軌道が消滅してゆき，その集積点が 2^{m+1} バンド状態への分岐点 $\bar{a}_{m+1}$ である．制御パラメターが $a = \bar{a}_m$ $(m = 0, 1, 2, \cdots.$ $\bar{a}_0 = 2)$, b_{mK} $(m = 0, 1, 2, \cdots.$ $K = 3, 5, 7, \cdots.$ $b_{0K} = b_K)$ 等の値となったとき，確率密度と相関関数は Frobenius-Perron operator の有限次元ベクトル空間での固有値問題を解くことによって求められ，相関関数は各固有モードからの寄与の和となる． その Fourier - Laplace 変換であるパワースペクトル $P(\omega)$ もまた閉じた形で求められる．そしていくらかの特有のモードがスペクトルに著しいピークを与え，カオス中の秩序運動を呈示することになる．[7), 8)]

臨界点 a_c に集積するバンド分離点 $\bar{a}_m$ の無限列上で上述の計算を行い，臨界現象が厳密な計算に基づいて議論できる．バンド分離点 $\bar{a}_m$ 近くの臨界現象は， $\bar{a}_m$ に集積する無限列 $b_{m-1,K}$ $(K = 3, 5, 7, \cdots)$ 上で計算を実行して調べられる．

§4. テント変換の臨界現象

$a = \bar{a}_0 = 2$ では， $\rho(x) = 1$, $C(n) = (1/12)\,\delta_{n,0}$ [δ - correlated], $P(\omega) = 1/12$ [white] となる．すなわち最も乱れた状態である．一連のバンド分離点は $\bar{a}_m = 2^{1/M}$ $(M = 2^m,\ m = 1, 2, 3, \cdots)$ で，それらの集積点がカオス消滅の臨界点 $a_c = 1$ である．

パラメター a が $\bar{a}_{m+1} < a \leqq \bar{a}_m$ のとき，すなわち M 個のバンドがある状態は，パラメターが a^2 $(\bar{a}_m < a^2 \leqq \bar{a}_{m-1})$ である M/2 個のバンド状態に相似的に対応し，rescaling factor は

$$\alpha_0(a) = \frac{a(a+1)}{a-1} \qquad と \qquad \alpha_1(a) = -\frac{a+1}{a-1} \tag{13}$$

である． $|\alpha_1(a)|$ が Feigenbaum の α に当るが，テント変換では $a \to a_c$ のとき

$$|\alpha_i(a)| \to \frac{2^{m+1}}{\ln r} \qquad (i = 0, 1.\ \ r は \sqrt{2} < r \leqq 2 の定数) \tag{14}$$

のように発散する．この発散がこの系の a_c 近くでの臨界現象を決めている要である．[8)]

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{\bar{a}_{m-1} - \bar{a}_m}{\bar{a}_m - \bar{a}_{m+1}} = 2 \tag{15}$$

である． Logistic model では $\bar{a}_m$ についても (4) が成り立つ．[2)]

バンド分離点近くの臨界現象

a を下げて最初のバンド分離点 $\bar{a}_1=\sqrt{2}$ に近づくと，$P(\omega)$ において振動数 $\omega=\pi$ のひとつの減衰振動モードが支配的となる．減衰定数は $\gamma_0=\sqrt{2}\,(a-\sqrt{2})$ で与えられ，critical slowing down を示す．$\bar{a}_1$ を過ぎるとこれは減衰なしの周期モードとなる．[7)]

2^{m-1} バンドから 2^m バンドの状態へ移るときは，振動数が $\omega=2\pi(l-\frac{1}{2})/2^{m-1}$ ($l=1,2,3,\cdots,2^{m-1}$) の 2^{m-1} 個の臨界モードが支配的であり，その減衰定数は ω によらず $\gamma_{m-1}=\gamma_0/2^{m-1}=(2/\bar{a}_m)(a-\bar{a}_m)$ である．$\bar{a}_m$ を過ぎるとこれらは減衰なしの周期モードとなり，既に存在していた $\omega=2\pi(l-1)/2^{m-1}$ ($l=2,3,\cdots,2^{m-1}$) の $2^{m-1}-1$ 個の周期モードと共に 2^m バンド状態の循環運動を表わす．[8)] このようにして，バンド分離点を過ぎるごとにカオスの中の秩序は段階的に増していく．Logistic model ではバンド間ホッピングの考えから $\gamma_{m-1}\propto(a-\bar{a}_m)^{1/2}$ が導かれ，数値実験で確かめられている．[9)]

臨界点 a_c 近くの臨界現象[8)]

$a=\bar{a}_m$ で相関関数は

$$C(n;\bar{a}_m)=G_0(n;\bar{a}_m)+G_1(n;\bar{a}_m) \qquad (16)$$

と書ける．G_0 は周期成分で $G_0(n+M;\bar{a}_m)=G_0(n;\bar{a}_m)$．そのパワースペクトル $P_0(\omega;\bar{a}_m)$ は振動数が $\omega=2\pi(l-1)/M$ ($l\quad 2,3,\cdots,M$) のところに δ 関数のピークを示す．$G_1(n;\bar{a}_m)$ は stochastic 成分でそのパワースペクトル $P_1(\omega;\bar{a}_m)$ は連続スペクトルである．

$a=\bar{a}_k$ ($k\leqq m$) で新たに周期モードになった 2^{k-1} 個の成分の $a=\bar{a}_m$ における $P_0(\omega;\bar{a}_m)$ での平均強度を $\phi(k;\bar{a}_m)$ とすると，大きな m に対して

$$\frac{\phi(k;\bar{a}_m)}{\phi(k+1;\bar{a}_m)}\begin{cases}\sim[\alpha_1(\bar{a}_m)]^2\simeq\left(\dfrac{2^{m+1}}{\ln 2}\right)^2\to\infty & (z=1)\\ =2\beta^{(2)}=20.963\cdots\quad[\text{文献 }5] & (z=2)\end{cases} \qquad (17)$$

を得る．z は写像 f の最大の性格を指定する指数で，テント変換では $z=1$，logistic model では $z=2$ である．周期成分の全強度 $G_0(0;\bar{a}_m)$ については

$$\frac{G_0(0;\bar{a}_m)}{G_0(0;\bar{a}_{m-1})}=\frac{\phi(1;\bar{a}_m)}{\phi(1;\bar{a}_{m-1})}\begin{cases}=\dfrac{1}{4} & (z=1)\\ \simeq 1 & (z=2)\ ^{*)}\end{cases} \qquad (18)$$

が成り立つ．このスケーリング則は，$a\to a_c$ のとき $\omega=\pi$ のモードが最も卓越してくることを示している．テント変換では (18) から $a\to a_c$ のとき $G_0(0;a)=(a-a_c)^2/16$ を得る．この系では

$$G_1(0;\bar{a}_m)/G_0(0;\bar{a}_m)<(\ln 2)^{-3}\cdot 2^{-m(m+1)-1} \qquad (19)$$

となるから，パワースペクトルの全強度 $C(0;a\ )$ もこの指数則に従う．logistic

---

*) $z=2$ の結果は文献 5) に基づく筆者の評価である．

modelでは $a \to a_c$ で $G_0(0;a)$ は一定値に近づく。

Stochastic成分の全強度 $G_1(0;\bar{a}_m)$ については

$$\frac{G_1(0;\bar{a}_m)}{G_1(0;\bar{a}_{m-1})} = \frac{W_m^2}{W_{m-1}^2} = \begin{cases} [\alpha_1(\bar{a}_m)]^{-2} & (z=1) \\ \beta^{-2} \quad (\beta=3.2375\cdots)\ [\text{文献}10] & (z=2) \end{cases} \tag{20}$$

を得る．ただし，W_m はM個あるバンドの幅の２乗平均である．(20)から $a \to a_c$ のとき

$$G_1(0;a) = \begin{cases} a-a_c\text{の任意のベキよりも速く}0, & (z=1) \\ \text{const.}\times(a-a_c)^{\sigma} \quad (\sigma=2\ln\beta/\ln\delta=1.5247\cdots)\ [\text{文献}10] & (z=2) \end{cases} \tag{21}$$

となる．

Huberman and Rudnick[11]によれば，Lyapunov指数 λ は logistic model に対して $a \to a_c$ で

$$\lambda = \lambda_0(a-a_c)^{\tau}, \qquad \tau = \ln 2/\ln\delta \tag{22}$$

となる．テント変換では $a \to a_c$ で $\lambda = a - a_c$ だから

$$\tau = \begin{cases} 1 & (z=1) \\ 0.4498\cdots & (z=2) \end{cases} \tag{23}$$

を得る．

以上，テント変換の結果は厳密な解析的計算によるものであり，logistic modelでは現象論的理論と数値実験による結果である．両者に共通面は多いが，それはSarkovskiiの順序が同じであることによる．テント変換の臨界現象で $\omega=\pi$ の秩序運動が決定的な役割をしているが，それは共存している不安定周期軌道のうち最も周期の短いのが周期２の軌道であることに関係していると考えられる．従って，logistic modelでも $\omega=\pi$ のモードが支配的であることは間違いないと思われる．一方，臨界指数は両者で明らかに異なっている。その相異は $a=a_c$ におけるアトラクターの構造の違いに由来している．

§5. β変換とその変形の臨界現象

一次元カオスにおける臨界現象と共存する不安定周期軌道の関連をみるために，β変換

$$f(x) = \begin{cases} \beta x & (0 \leqq x < \beta^{-1}) \\ \beta x - 1 & (\beta^{-1} \leqq x \leqq 1) \end{cases} \qquad (0<\beta\leqq 2) \tag{24}$$

とその変形

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{m} & (0 \leqq x < \frac{m-1}{m}) \\ \beta\left(x - \frac{m-1}{m}\right) & (\frac{m-1}{m} \leqq x \leqq 1) \end{cases} \qquad (0<\beta\leqq m,\ m=2,3,\cdots) \tag{25}$$

のカオスについて　森研究室での共同研究に基づいて簡単にふれる．(24)は $1<\beta\leqq 2$ で，(25)は $1<\beta\leqq m$ でカオスを呈するが，バンド分離は起こらない．

β変換の周期軌道についてはTakahashiの順序

$$2 \vdash 3 \vdash 4 \vdash 5 \vdash \cdots \vdash N \vdash \cdots \ \vdash 1 \tag{26}$$

があてはまり，制御パラメーター β の対応する無限列 β_N ($\beta_1=2>\beta_2>\beta_3>\cdots>\beta_N>\cdots>\beta_c=1$)

上で容易に $\rho(x)$, $C(n)$, $P(\omega)$ が計算できる．$\beta=\beta_N-0$ では，共存する周期軌道の中で固定点を除く周期最小の軌道の周期はNである．Nが大きいとき，$P(\omega)$ は $0<\omega\leqq\pi$ でN/2個のピークをもち，そのうち $0<\omega\lesssim\beta-\beta_c$ にある $N(\beta-\beta_c)\simeq -\ln(\beta-\beta_c)$ 個のピークが $\beta\to\beta_c$ のときの $P(\omega)$ の支配的な構造となる．$\omega=0$ 近くの $P(\omega)$ が卓越してくるのは，固定点が常に共存していることによる．

変換(25)では，βを下げたとき $\beta=\beta_N$（上記と同じβ_N）で $mN-1$ 周期軌道が消滅する．この点でやはり $\rho(x)$, $C(n)$, $P(\omega)$ が計算できる．具体的な計算によると，$\beta\to\beta_c$ のとき，$m=2$ では $\omega=\pi$，$m=3$ では $\omega=2\pi/3$ のピークが卓越してくる．これは，変換(25)においては m 周期軌道が常に共存していることによるものである．

§6．おわりに

滞在確率の密度，非周期軌道の時間相関関数およびそのパワースペクトルを厳密に求めて，テント変換とβ変換のカオスの構造と臨界現象を調べた．その際，特定のタイプの不安定周期軌道の出現・消滅に対応する制御パラメターの無限列に着目することによってカオス中の秩序運動を簡明にとらえることができた．共存する不安定周期軌道の中で周期最小のものが臨界現象の理解に決定的に重要であることがわかった．周期軌道の共存関係をおさえれば，区分的に線形な写像には同じ方法が直ちに使える．

テント変換のカオスは，現象論的理論や数値実験で得られている *logistic model* のカオスと定性的に多くの共通性をもつが，それは Sarkovskii の順序が共通だからである．しかし，両者の臨界指数は全く異なる．ここでの計算の方法を *logistic model* 等へ拡張するのは今後の問題である．

一次元写像のカオス領域と実験との関係では，§1で述べたBénard対流でバンド分離に対応するカスケードが観測されているらしいが，[6] その定量的解析の結果が待たれる．Swinney達のグループは Belousov-Zhabotinskii 反応の実験で *flow rate* を変えたとき，周期領域とカオス領域が交互に現われ，一次元写像での予測に一致する順序で周期状態が出現するという結果を得ている．[12] 彼らはさらに対応する一次元写像を実験的に求めている．臨界現象はまだくわしく調べられていないが，一次元写像の重要性はここでも明らかである．

参考文献

1) R. M. May, Nature 261 (1976) 459.

2) S. Grossmann and S. Thomae, Z. Naturforsch. 32a (1977) 1353.

3) M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19 (1978) 25.

4) M. J. Feigenbaum, Phys. Lett. 74A (1979) 375.

5) M. Nauenberg and J. Rudnick, Phys. Rev. B24 (1981) 493.

6) A. Libchaber, C. Laroche, and S. Fauve, J. Physique Lett. 43 (1982) L-211.

7) H. Shigematsu, H. Mori, T. Yoshida, and H. Okamoto, J. Stat. Phys. 30 (1983) No. 3.

8) T. Yoshida, H. Mori, and H. Shigematsu, J. Stat. Phys. 31 (1983) No. 2.
9) S. J. Shenker and L. P. Kadanoff, J. Phys. A 14 (1981) L 23.
10) B. A. Huberman and A. B. Zisook, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 626.
11) B. A. Huberman and J. Rudnick, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 154.
12) R. H. Simoyi, A. Wolf, and H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 245.
J.-C. Roux, J. S. Turner, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, in <u>Nonlinear Problems : Present and Future</u>, edited by A. R. Bishop, D. K. Campbell, and B. Nicolaenko (North-Holland, Amsterdam, 1982), P. 409.