

Title	相分離過程における相似則(強い相関をもつゆらぎの統計物理学, 科研費研究会報告)
Author(s)	富田, 博之
Citation	物性研究 (1983), 40(5): 50-53
Issue Date	1983-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91109
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

相分離過程における相似則

京大・教養 畠田博之

次のようなTDGL系を考える。

$$F(\{s(r)\}) = \int dr [f(s(r)) + \frac{K}{2} (\nabla s)_r^2] \quad (1)$$

$$f(s) = -\frac{a}{2} s^2 + \frac{g}{4} s^4 \quad (\text{磁場なし})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle s_0 s_r \rangle_t = L (i\nabla)^\alpha \left\{ k_B T \delta(r) + K \nabla^2 \langle s_0 s_r \rangle_t + [a \langle s_0 s_r \rangle_t - g \langle s_0^3 s_r \rangle_t] \right\} \quad (2)$$

ここで α は order-parameter を保存しない系 (case 1) では $\alpha=0$, 保存する系では $\alpha=2$ (case 2) であり, 以下では, いずれも $\langle s \rangle_t = 0$ の場合を考える。

Langer 達¹⁾ は (2) の $\langle s_0^3 s_r \rangle_t$ 項を, 相関より多に對し, $r \gg \xi$ とし,

$$\langle s_0^3 s_r \rangle_t \cong \frac{\langle s^4 \rangle_t}{\langle s^2 \rangle_t} \langle s_0 s_r \rangle_t \quad (3)$$

と仮定し, $\langle s^2 \rangle_t, \langle s^4 \rangle_t$ は局所分布 (一体分布) 関数から近似的に求め, (2) を同じさせて数値的に解いた。この時, structure function

$$S(q, t) = \int dr e^{iq \cdot r} \langle s_0 s_r \rangle_t$$

に対する運動方程式は

$$\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial t} S(q, t) = g^\alpha [K(r(t) - g^2) S(q, t) + k_B T] \quad (4)$$

の形になる。線形理論では $r(t)$ は一定で, $r = a/K = 2\xi^{-2}$ である。(4)は Langer 達の方法でもよいか, sum-rule

$$\int dq S(q, t) = \langle s^2 \rangle_t \cong a/g \quad (5)$$

を用いることにより計算を簡単化することができる。²⁾ いずれにしても非線形効果が入ることにより, $r(t)$ は $t \rightarrow \infty$ とともに $r(t) \rightarrow 0$ となり, 不安定

域が次第に縮小され、 $t \rightarrow \infty$ で $g \sim 0$ に δ 関数的なピークが成長する。

Case 2 ($\alpha = 2$) に対しては、ピークの位置 $g_m(t)$ は、^{1), 2)}

$$g_m(t) \sim t^{-0.21} \quad (6)$$

Case 1 ($\alpha = 0$) では、ピークは常に $g = 0$ で、その中が ³⁾

$$g_c(t) \sim t^{-0.5} \quad (7)$$

のふるまいを示す。この値は数値計算の範囲内で、系の次元には依存しない。

Ref. 1), 2) の方法は、系の不安定性と安定化を定性的に理解することができ、定量的にも (6), (7) は計算機実験等の値とよく一致している。最大の欠陥は (4) が、 $t \rightarrow \infty$ で平衡形 (Ornstein-Zernike 形) になる。

$$S(g, \infty) = \frac{k_B T}{K g^2} \quad (8)$$

となることである。筆者は Ref. 2) の段階では、これは Interface のほやけた、Spherical モデルであると考えていたが、(4) の $r(t) \rightarrow 0$ は、

$$\langle S^4 \rangle \rightarrow \frac{a}{g} \langle S^2 \rangle$$

に対応し、 $\langle (S^2 - \langle S^2 \rangle)^2 \rangle \rightarrow 0$ となっており、Interface は存在する。むしろ、(8) は臨界点に類似の、ramified-interface を表わしていると考えた方が正しいであろう。Percolating-limit とでも呼ぶべき。単安定状態を示唆していると思われる。

今回、上記の欠陥を改善する方法を試みた。以下、Case 1 ($\alpha = 0$) についての報告する。すなわち、(3) の仮定は、 r の全領域で成立つはずはなく、短距離に対しては、むしろ平衡状態を強制すべきである。これは (4) において、 $r(t)$ は、適当な cut-off を入れて、 $g > g_c(t)$ では、

$$r(t) = -r_{eg} \quad (9)$$

(ただし、 r_{eg} は、 $S_{eg}(g) \sim k_B T / (r_{eg} + g^2)$ で決める。) を強制することである。ただし、特徴的な波数としては、 $K \equiv \xi^{-1}$ と、(4) の不安定域 $r(t)^{1/2}$ 以外には現れないとすれば、 $g_c(t)$ は $r(t)^{1/2}$ の数倍とすべきであろう。

もし、相似則

$$S(g, t) \cong l(t)^d \mathcal{S}(l(t)g) \quad (10)$$

が成立つならば、(d は次元) 時間を新たに

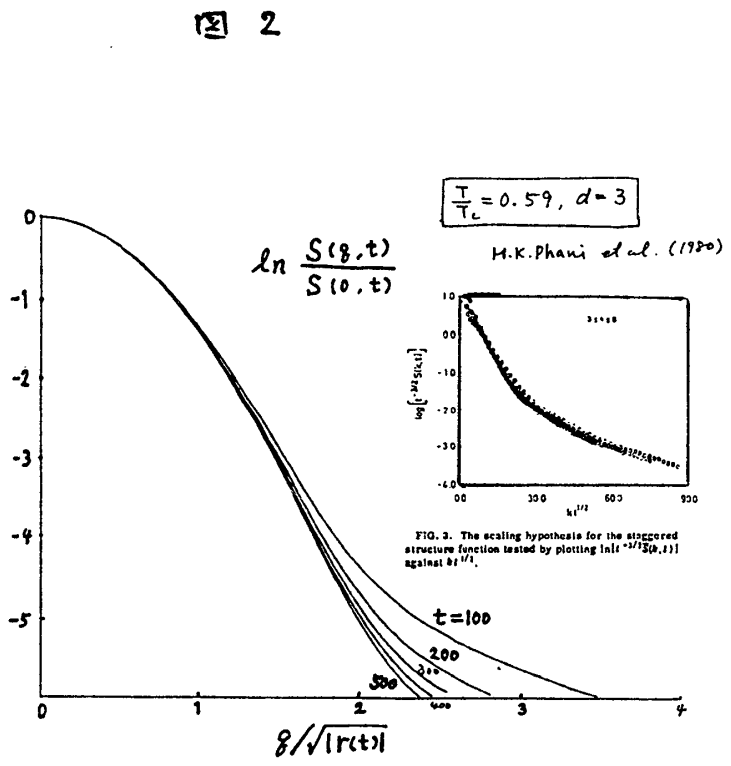
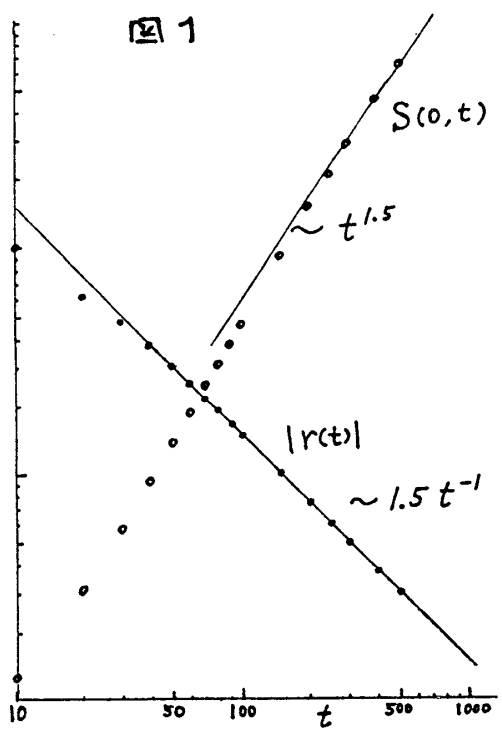
$$KLt \rightarrow t$$

として、

$$r(t) \cong \frac{d}{2} t^{-1} \tag{11}$$

$$S(0, t) \propto t^{d/2}$$

が成立しなければならず、 $\ell(t) \propto t^{1/2}$ となる。図は、 $d=3$ の場合で、 $g_c(t) = 2 r(t)^{1/2}$ とした時の結果で、(11) は予想とおりである。



しかし図2の関数形の方は、 $t=100 \sim 500$ では、tail の部分は相似則には乗っておらず、漸近形は

$$S(g, t)/S(0, t) = e^{-t g^2} \tag{12}$$

の Gaussian である。図2の右上は、Phani 達の計算機実験⁴⁾で、太田達⁵⁾の Interface - Theory で見事に再現されたように、tail 部は

$$S(g, t) \propto 1/g^{d+1} \tag{13}$$

の Porod 則に一致してゐると考えるべきである。これが再現されるのは、

$$\lambda \gg g \gg |r(t)|^{1/2}$$

に対しては(9)の仮定が強すぎるためである。以下に研究会後の結果を補足する。

Interface の密度が小さい時は, Interface の形は TDGL 方程式の定常解

$$K \nabla^2 S = \frac{\partial f}{\partial S} = -aS + gS^3$$

で与えられるとしてよい。この時, (2) 式の右辺の [] の項は

$$a \langle S_0 S_r \rangle - g \langle S_0^3 S_r \rangle \cong K \langle (\nabla S)_0 \cdot (\nabla S)_r \rangle \quad (14)$$

となる。Interface 上の各点での曲率を, 接平面内で 2 束平均した量を $1/\rho(a)^2$ (3次元では主曲率を $1/R_1, 1/R_2$ とし $1/\rho^2 = (3/R_1^2 + 2/R_1 R_2 + 3/R_2^2)/8$) とし,

$$\xi \ll r \ll \rho(a) \quad (15)$$

の範囲では展開式

$$\frac{g}{a} \langle (\nabla S)_0 \cdot (\nabla S)_r \rangle \cong (d-1) \gamma_d \frac{1}{r} \int \frac{dA}{V} \left(1 - \frac{d+1}{8} \frac{r^2}{\rho(a)^2} \right) \quad (16)$$

$$\frac{g}{a} \langle S_0 S_r \rangle \cong 1 - \gamma_d r \int \frac{dA}{V} \left(1 - \frac{d-1}{24} \frac{r^2}{\rho(a)^2} \right) \quad (17)$$

$$\gamma_d = 2^d \Gamma(\frac{d}{2})^2 / \pi \Gamma(d)$$

を得る。 \int は Interface について行う。 $\int dA/V = A$ は Interface の密度を表わし, (16), (17) は A についての展開とみなせる。ただし, $\langle S \rangle \cong 0$ では, cluster の曲率半径, cluster 間のさより)は, いずれも A^{-1} 程度になるので, (16), (17) のオ 2 項は, cluster 相関の初項 ($\sim A^2$) と same order になり, 意味を失う。ともかく (16) は, r の小さい所で (14) に対し A/r の singularity を与える。この項が, 相関関数の r の一次の項に対応し, 構造関数の tail $1/g^{d+1}$ (Porod 則) を与えることになる。この tail 部分も同じ相関則に従うならば, 系を特徴づける長さは A^{-1} のみ ($A^{-1} \gg \xi$) となる。元の TDGL 方程式にもとめれば $A(t) \sim t^{-1/(d+2)}$ を得る。case 1 に対しては $t^{-1/2}$ となり他の理論と一致するが, case 2 に対しては, $t^{-1/4}$ となり, 太田達の次元解析の結果 $t^{-1/3}$ とは一致しない。

- 1) J.S. Langer et al. Phys. Rev. A11 (1975), 1417
- 2) H. Tomita, Prog. Theor. Phys. 59 (1978), 1116
- 3) H. Tomita, C. Murakami, Prog. Theor. Phys. 60 (1978), 683
- 4) M.K. Phani et al. Phys. Rev. Lett. 45 (1980), 366
- 5) T. Ohta et al. Phys. Rev. Lett. 49 (1982), 1223 ; 本研究会講演