Cayley tree 上のスピングラスとスピンクリスタル

東北大工　守田　徹

配位数3の Cayley tree 上の Ising model の中心部分（Bethe lattice）を調べる。相互作用は最近接格子点間のみとし，値は +J（>0）と −J をとり，外磁場 h_{ex} がかかっているとする。1では規則系，2ではランダム系を論ずる。

1. 規則系

各スピンの相互作用は，その最近接スピンのうちの2つと +J，他の1つと −J であるとする。図1で実線は +J を点線は −J を表わす。

この系の表面から ξ−1 番目の shell 上のスピンから ξ 番目の shell 上のスピンへの有効場を，それらを結ぶ相互作用が +J か −J かに従って $h_\xi^{(+)}$，$h_\xi^{(-)}$ とする。$h_\xi^{(\pm)}$ は漸化式

$$h_\xi^{(\pm)} = f\{\pm J,\ h_{\xi-1}^{(+)} + h_{\xi-1}^{(\mp)}\} \qquad (1)$$

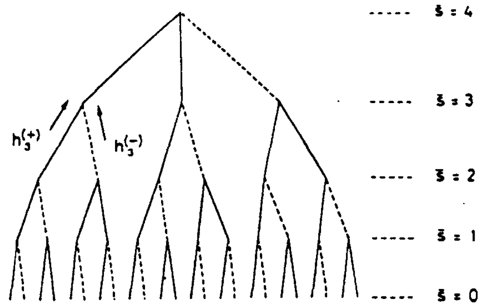

図 1

をみたす。初期値は $h_{\xi=0}^{(\pm)} = 0$ である。ここで $f\{J,h\}$ は，外場 h_{ex}，温度 $T = 1/k_B\beta$ のとき

$$f\{J,h\} = \beta^{-1}\tanh^{-1}\left[\tanh(\beta J)\tanh(\beta h_{ex} + \beta h)\right] \qquad (2)$$

である。(1)は唯1つの固定点 $h_\infty^{(\pm)}$ をもつ。$h_\infty^{(\pm)}$ は，図2の P の範囲の h_{ex}，T のとき安定であり，$h_{\xi=0}^{(\pm)} = 0$ から出発した(1)の iteration は，このとき $h_\infty^{(\pm)}$ に近付くことが確められる。図2のP以外の領域では $h_\xi^{(\pm)}$ は固定点に近付かず，周期的に同じ値をとる場合と，周期がない場合とがある。図2の SG は周期がないことを，数字6，7，11，52は周期を表わす。

図3は 10000 shells の Cayley tree の中心の 15 shells における磁化のゆらぎ

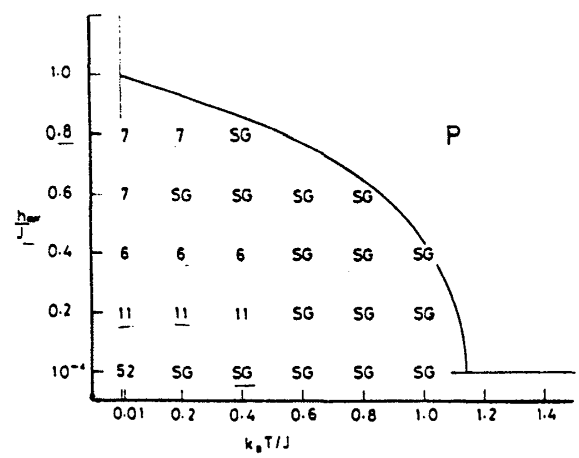

図 2

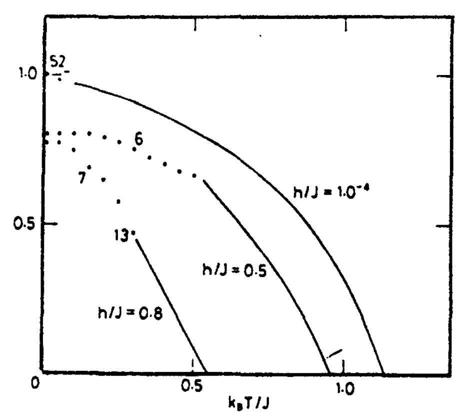

図 3. h/J は h_{ex}/J を表わす。

$\sum_i [\langle\sigma_i\rangle^2 - (\sum_j\langle\sigma_j\rangle/\sum_j 1)^2]/\sum_i 1$ を温度の関数として求めたものである。磁化の値 $\langle\sigma_i\rangle$ の分布は，SG相（同期がない相）では連続的であるのにたいし，SC相（同期がある相，スピンクリスタル相）ではいくつかの中心の周りに集中している。

以上の内容は Phys. Lett. A (1983) に掲載予定である。

2. ランダム系

配位数3の Cayley tree 上での ±J ランダムボンド Ising model を考える。相互作用は確率 $P_+=p$ で $+J\,(>0)$，確率 $P_-=1-p$ で $-J$ をとるものとする。表面から $\xi-1$ 番目の shell 上のスピンから ξ 番目の shell 上のスピンへの有効場の分布関数を $p_\xi(h)$ とすると，それは漸化式

$$p_\xi(h)=\sum_{\alpha=\pm} P_\alpha \iint \delta(h-f\{\alpha J, h_1+h_2\})\, p_{\xi-1}(h_1)\,p_{\xi-1}(h_2)\,dh_1\,dh_2 \qquad (3)$$

をみたす。初期値は $p_{\xi=0}(h)=\delta(h)$ である。積分区間 $[-J,J]$ を D区間（$D=32\sim1024$）に分け，積分を和で近似し，(3) の iteration で $p_\xi(h)$ を求める。$p_\xi(h)$ は $\xi\to\infty$ で常に収束する。$h_{ex}\gtrsim 2J/D$ の系の性質は $p_\xi(h)$ の極限 $p(h)$ を用いて計算する。$h_{ex}=0$ の系の性質の計算では，$h_{ex}\simeq 2J/D$ で求めた極限 $p(h)$ を初期値 $p_{\xi=0}(h)$ として (3) の iteration を行い，得られた極限を用いる。

磁場 $h_{ex}\neq 0$ では相転移は認められない。$h_{ex}=0$ のとき，$p_\xi(h)$ の極限 $p(h)$ は3種類に分類される。すなわち，常磁性（P）相に対応する $\delta(h)$，スピングラス（SG）相に対応する，0でない幅をもつ h の偶関数，強磁性（F）相に対応する，以上以外のもの。SG相での $p(h)$ は $+J$ の確率 p に依存しない。図4の SG相と F相の境界は，$p(h)$ のみたす方程式（(3) で $p_\xi(h)$ と $p_{\xi-1}(h)$ を $p(h)$ とした式）のスピングラス相の解の不安定性の条件から定められた。T=0 でこの境界は $p_c=0.8694$ である。SG相とF相の境界で帯磁率は cusp をもつ。

スピングラス相で得られた $p(h)$ を用いて計算した Bethe近似の自由エネルギーは，単調減少，concave で，エントロピー，比熱とも常に正である。

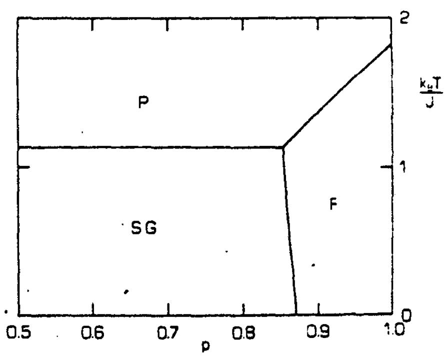

図4.