物性研究 41-3(1983-12)

エントロピー生成の空間的振動

東邦大・薬　高　山　光　男

(1983年10月7日受理)

§1　はじめに

流れるペンデント流体系には，周期的な凹凸をもつ安定なパターンの現われることが知られている。[1] 流体力学的な効果によって現われるのであろうが，非平衡熱力学的には非線形領域における空間的パターン形成とみることもできる。

非平衡熱力学においてもまた，系がどの方向に自然に進んで行くのかが問題となり，一般的発展規準として

$$\frac{\mathrm{d_x}P}{\mathrm{d}t} \leq 0 \tag{1}$$

が提出されている。[2] これは，どのような領域においても一般化力に関するエントロピー生成は時間とともに減少するかまたは一定値に保たれるということを意味している。線形領域と非線形領域における定常状態が従う極値原理にはそれぞれプリゴジンの原理[2]と沢田の要請[3]とがある。これらはそれぞれ

$$\sigma[S] = \mathrm{Min} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(S_0 + \sum_{i=1}^{n} S_{\mathrm{R}i}\right) = \mathrm{Max} \tag{3}$$

というもので，$\sigma[S]$は局所エントロピー生成を，S_0は非線形系のエントロピーを，そして$S_{\mathrm{R}i}$はi番目の接触浴のエントロピーを意味する。ペンデント流体系もまた，線形領域と非線形領域とではこれらの極値原理に従っているようである。本論文では最初にこのことが確められる。そして，少なくとも線形領域から非線形領域への緩和過程では

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d_x}P}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d_J}P}{\mathrm{d}t} > 0 \tag{4}$$

という発展規準に従うことが示される。

---

*) TAKAYAMA, Mitsuo

ところが非線形領域において現われる周期パターンでは，幾何学的な周期性とともにエントロピー生成もまた空間的に振動しており，エントロピー生成の極小と極大とが同時に含まれている。この様相は，いわゆる散逸構造[2)]においても現われていることが示される。

§2　ペンデント流体系におけるエントロピー生成

供給流速Qが非常に遅く，ペンデントドロップの形がほとんど力学的平衡状態とみなせる場合でも，ドロップの成長過程において内部摩擦によるエントロピー生成が生じるであろう。ドロップ内に流速勾配を仮定することにより，位置hにおける一般化力は

$$X_h = -\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_h \tag{5}$$

のように定義することができ，uは流速を，rはドロップの半径方向を意味する。流速勾配は運動量の輸送をともなうから，現象論係数を

$$L = \frac{\mu}{T} \tag{6}$$

とおくことにより，流れの式は

$$J_h = -\frac{\mu}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_h \tag{7}$$

と書くことができる。ここでμは粘性係数を，Tは絶対温度を意味する。定義により局所エントロピー生成は

$$\sigma[S]_h = J_h X_h = \frac{\mu}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_h^2 \tag{8}$$

となる。境界条件として

$$u = \max.\ (r = 0), \qquad u = 0\ (r = R)$$

を与えることにより，平均流速$\overline{u}$を用いて一般化力は

$$X_h = \left(\frac{\overline{u}}{R}\right)_h \tag{9}$$

で表わすことができる。Rはドロップ半径である。平衡状態の近くでは流速勾配はいつでも減衰するであろうから

$$\frac{\mathrm{d}X_h}{\mathrm{d}h} < 0 \qquad (Q \simeq 0) \tag{10}$$

となり，局所エントロピー生成もまた減衰する。成長するペンデントドロップは非定常系であるが，定位置においては近似的に

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma[S]_h = 0 \qquad (Q \simeq 0) \tag{11}$$

と書くことができよう。線形領域においてこれはエントロピー生成極小の原理(2)と一致するであろう。これはまた，一般的発展規準(1)の直接的な要請でもある。

しかし，臨界的な供給流速において生じる不連続的な形の転移では[1]明らかに平均流速が成長する。すなわち

$$\frac{\mathrm{dX}_h}{\mathrm{d}h} \geq 0 \qquad (Q \geq Q_c) \tag{12}$$

となって，等号は限界的な条件を意味する。ペンデント流体系の形は不連続転移によって適当な長さをもった流れる流体柱に成長するが，そのときの時間発展は

$$\frac{\mathrm{dX}_h}{\mathrm{d}t} > 0 \tag{13}$$

のようにみえる。この非平衡系における緩和過程では物質流れが成長するので，一般化力もまた増大するのである。これが非線形流れのエントロピー生成に対する関接的効果であり，少なくともこの緩和過程では全エントロピー生成は時間とともに増大する。すなわち

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d_x}P}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d_J}P}{\mathrm{d}t} > 0 \\ &\qquad \frac{\mathrm{d_x}P}{\mathrm{d}t} \leq 0, \quad \frac{\mathrm{d_J}P}{\mathrm{d}t} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

となって，一般的発展規準(1)とは矛盾しない。この新しい発展規準の要旨は，非線形流れによる一般化力の増大とそれによるエントロピー生成の増大ということができる。そして，発展が終わり定常状態では，エントロピー生成は極大値をとるべきである。この極値性は沢田の要請でもあるが,[3] 発展規準(14)の直接的要請であることもわかる。すなわち，定常状態も含めた，より一般的な発展規準は

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \geq 0 \tag{15}$$

となる。いままでエントロピー生成Pと局所エントロピー生成$\sigma[S]$とを区別して議論してこなかったが，互いに

$$P = \int \sigma[S]\,\mathrm{d}V \tag{16}$$

という体積に関する積分で関係づけられており，極値性に対してはどちらを選んでも同じである。

§3　エントロピー生成の空間的振動

非線形領域，すなわち流れる流体柱では，平均流速は重力によってhとともに増大するが，供給流速Qが一定の下では

$$\bar{u}_h = \frac{Q}{\pi R_h^2} \tag{17}$$

となって，位置hにおける平均流速は半径の二乗に反比例する。ここで半径はhの関数である。この式を一般化力の式(9)に用いることによって，局所エントロピー生成の式は

$$\sigma[S]_h = J_h X_h = \frac{\mu}{T} X_h^2 = \frac{\mu}{T}\frac{Q^2}{\pi R_h^6} \tag{18}$$

と書くことができる。周期パターンをもったペンデント流体系では，半径Rはhの周期関数となっており，(18)式からわかるように局所エントロピー生成は空間的にはげしく振動する。図1には文献1の写真Cから直接計算した局所エントロピー生成の空間的振動を示す。散逸構造において濃度の振動は与えられているが,[2)] エントロピー生成も振動するということは指摘されていない。エントロピー生成が振動するということは，系がエントロピー生成極小の部分と極大の部分とを周期的にそなえていることを意味している。そして，位置によって従うべき発展規準が異なっているということができる。もちろんグローバルには非線形系であるから発展規準(15)に従っているはずである。

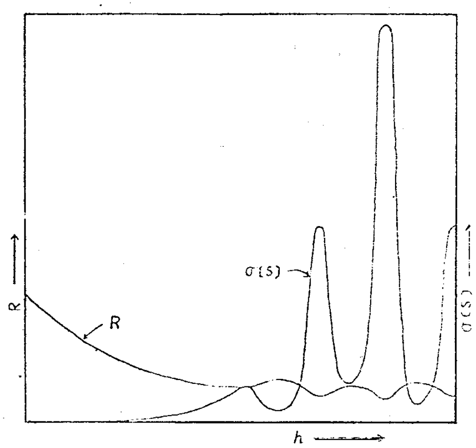

図1　局所エントロピー生成の空間的振動

ベナール対流のような散逸構造でもエントロピー生成の空間的振動を指摘することはむずかしいことではない。すなわち，正六角形から成る対流パターンで水平方向に空間軸xをとれば，上面における熱浴との温度勾配はxとともに振動することが予想される。上昇流によるわき出し口の付近では最も温度勾配が大きく，下降流になる吸い込み口の付近では最も温度勾配が小さくなるはずである。温度勾配がこの系にとっての一般化力であることを考えれば，エントロピー生成が空間的振動の様相をもつということは明らかである。このことは，非線形領域における周期パターン形成に一般的なことであると我々は考えている。

参考文献

1) 高山光男：物性研究，**39**－3(1982－12)171.

2) グランスドルフ/プリゴジン，松本・竹山訳：構造・安定性・ゆらぎ
—その熱力学的理論—，（みすず書房，1977）.

3) Y. Sawada: Prog. Theor. Phys., **66**(1981)68., 沢田康次：数理科学—特集非線形—,
No.224（サイエンス社，1982）19.