京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	AB効果の問題点(量子力学の基礎について,研究会報告)
Author(s)	永宮, 健夫
Citation	物性研究 (1984), 41(5): 278-283
Issue Date	1984-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91200
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

の可能性ならびに磁性体中への電子線の侵入の効果である。これまでの実験では，あいまいにされていたこれらの問題点を除いた実験を行なった結果，AB効果はまさしく存在することが実証された。

参考文献

1) H. J. Bernstein and A. V. Philips : Scientific American **245** (July, 1981) 95.
2) T. T. Wu and C. N. Yang : Phys. Rev. D **12** (1975) 3845.
3) たとえば，R. G. Chambers : Phys. Rev. Lett, **5** (1960) 3; G. Möllenstedt and W. Bayh : Phys. Bl, **18** (1962) 299.
4) D. Gabor : Proc. R. Soc. London A**197** (1949) 454.
5) A. Tonomura et al : J. Electron Microsc. **28** (1979) 1.
6) A. Tonomura et al : Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1430.
7) A. Tonomura et al : Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1443. 外村彰：科学**52** (1982年9月号) 552.
8) O. Costa de Beauregard et al : Lett. Nuovo Cimento **33** (1982) 79.
9) P. Bocchieri et al : Lett. Nuovo Cimento **35** (1982) 370.
10) A. Tonomura et al : Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 331.
11) N. Osakabe et al : 投稿中

AB 効果の問題点

永宮健夫

AB効果に興味と疑問をもっていましたので，基研の研究会に1日押しかけて行ったのですが，私のコメントは下記の2つのことです。第1のことは外村氏の実験に関係していて，話したこと大体そのままです。訂正する必要はないと考えています。第2のことは，研究会の後も考えて，疑問の諸点を書き記し，高橋秀俊さんに意見を求め，明快な返答をえまして疑問点を解消できたと考えますので，その要点を記します。

1. はじめに厚さ a の平板状の一様磁場を考える。$z=-a/2$ から $z=a/2$ までの間に y 方向の一定磁場 B があるとする。これに $z=-\infty$ の方から電子波が来て，磁場を通り抜け，$z>a/2$

の側に進んで行く，という問題を考える。まず$z<-a/2$の側でベクトル・ポテンシャルを0にとると，入射波は$\exp(ikz)$ととることができる。次にゲージをかえて

$z<-a/2$では　　$A_x=-B(a/2)$

$-a/2<z<a/2$では　　$A_x=Bz$

$z>a/2$では　　$A_x=B(a/2)$

とする。**A**はx成分だけをもち，$z=\pm a/2$で連続につながるようにした。このゲージでは，入射波は

$$\exp(ikz+ik'x),\quad k'=-(e/c\hbar)Ba/2$$

となる。(反射波があってもよい。反射波は$k\to -k$としたものである。)磁場中の波動関数は，上記の入射波(および反射波)と$z=-a/2$で連続滑らかに接続するものでなければならないから，$Z(z)\exp(ik'x)$の形になる。最後に，$z>a/2$側の透過波は$\exp(ik''z+ik'x)$の形をもつことは明らかである。そこでまたゲージを変えて，$z>a/2$で$A_x=0$になるようにする。このとき透過波は

$$\exp(ik''z+ik'''x),\quad k'''=2k'=-(e/c\hbar)Ba$$

となる。(エネルギー保存則から$k''^2+k'''^2=k^2$。)

即ち，**A**$=0$の空間を通って磁場平面に垂直に当った入射波は，磁場を通りぬけて，**A**$=0$の空間の透過波として斜めに進む。この透過波の$z=\mathrm{const}$面上の位相は，$k'''x$によってかわり，x_1とx_2の間の位相差$k'''(x_2-x_1)$はx_1とx_2の間に含まれる磁束の$-(e/c\hbar)$倍にひとしい。

もしも上に書いた中間のゲージでの入射波と透過波をみれば，両者とも$\exp(ik'x)$によってx方向に位相変化を示し，従って磁場を通りぬけたからといって，位相がx方向に変化するということはない。但し，この場合も磁場の上側，下側のcurrent densityは**A**$=0$のときと同じ方向をもつ。

さて，外村氏の実験では，薄い板の強磁性体をリング状にしたもの(従って磁力線がリング状に閉じたもの)を使い，これに垂直に電子ビームをあてる。板の厚みは幅にくらべて小さいから，板のすぐ上と下では，上記の中間のゲージのときの波が考えられる。このゲージでは，リングから遠く離れた所では**A**は急速に0に近づくから，入射波は**A**$=0$のときの$\exp(ikz)$であるが，この波はリングに近づくと，板の上下附近で$\exp(ik'x)$の因子をもつことになる。そしてリングを離れて再び遠くへ行くと$\exp(ikz)$になる。即ち，リングの外を通った波も，

内を通った波も，最後は入射波と同じ形にまとめられる。内外の波の位相差が磁束分だけ違ったままであるということはない。そればかりか，入射波はリングに近づくにつれて波面を変え，リングの内外で波面に段差ができ，そして大体そのままの形でリングを過ぎ，遠くで再び平面波になる。但し，リング附近では散乱波による乱れもある。

ところで，外村氏の実験では，電子レンズによってリングの像を作り，分離したビームをその像の所で一緒にして干渉縞を作らせる。像の所では完全に$\mathbf{A}=0$である。そして像作りは波の進行方向に従ってなされるのでなく，current density（ビームの方向）によってなされる。従って像の所で，リング板に当る波は$\exp(ikz)$であり，リング板を通った直後の波は$\exp(ik''x+ik'''x)$である。即ちリングの内外の波の位相差は磁束分だけ存在する。外村氏はリングのすぐあとの所に焦点を合わせて写真をとっているのだから，磁束分だけの内外の位相差が出ているのである。

“すぐあと”というのは，どれくらい“あと”までであろうか？ 強磁性板の幅をdとし，電子線の波長をλとすると，内外の位相差の観測値は$2\pi\times5.5$位だから，強磁性板を通った後のビームの傾きは$5.5\lambda/d$の程度，この傾きによって例えば$d/10$のずれを生ずるような距離は$(d/10)\div(5.5\lambda/d)=d^2/55\lambda$，即ち$d^2/55\lambda$の程度リングから離れても，まだ“すぐあと”とみなすことができる。なお“すぐまえ”の様子はどうだろうか，知りたいことである。

2. Aharonov-Bohm の最初の論文（Phys. Rev., 1959）をみると（私はそれだけしか見ていないのだが），コイルに電子線があたる場合，コイルの右を通る電子については，右側の道に沿う積分$(e/\hbar c)\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$だけの位相変化，左を通る電子については，左側の道に沿う積分$(e/\hbar c)\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$だけの位相変化があり，結局，コイルの左右を通った電子線の位相差は$(e/\hbar c)\times\oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=(e/\hbar c)\times$（磁束）にひとしい，と記されている。“単一連結の領域で，磁場がゼロであれば，波動関数を$\psi=\psi_0\exp(-iS/\hbar)$ととり，$\psi_0$は$\mathbf{A}=0$のときの解，$\nabla S/\hbar=(e/c)\mathbf{A}$，とすることができる”というのが根拠である。$\psi_0$は$\mathbf{A}=0$のときの解（$\psi_0$ is the solution when $\mathbf{A}=0$）とだけ書いてある。$\mathbf{A}=0$というのは磁場がないことか？ そうならば，コイルが無限に細くて無限に長くて，コイル内に電子が侵入できないような場合には，$\theta=0$方向から入射した波について

$$\psi_0=\exp(-ikr\cos\theta)-J_0(kr)\exp(ikr)$$

となる。但しrはコイルからの距離，θはコイルのまわりの角である。$\mathbf{A}$としてθ成分だけがあるようなものをとり$A_\theta=(\hbar c/e)\alpha/2\pi r$とすると，$\psi$は$\psi_0\exp(-i\alpha\theta)$にひとしくなり，この$\psi$はA.-B.が具体的に求めた$\psi$と同じではない。高橋秀俊さんの返答では，$\psi_0$は$\mathbf{A}$を$\theta=\pi$

のところに“しわよせした”ときの解であるという。すなわちゲージ変換

$$A_\theta = (\hbar c/e)\,\alpha/2\pi r \to A'_\theta = A_\theta + (\nabla\chi)_\theta,$$

$$\chi = -(\hbar c/e)\,\alpha\theta/2\pi$$

をすれば $A'_\theta = 0$ になってしまう。但し，$\theta=\pi$ を除き，θ が π をこすときは 2π だけへらして χ にジャンプを作り，従って χ を1価関数とし，$\nabla\chi$ には δ 関数を入れる。そういうことで私も諒解した。

もともと，$\mathbf{A}$ についても，$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ についても，Stokesの定理は成立つ筈で，そのためには $\mathbf{A}$ も $\mathbf{A}'$ も一価連続で微分できる関数でなければならない。そして $\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \text{flux} = \oint \mathbf{A}'\cdot d\mathbf{s}$ だから，$\oint \nabla\chi\cdot d\mathbf{s}$ すなわち χ の変化分はゼロでなければならない。この点が私がこだわった点である。χ にジャンプを与えてなお連続関数とみなす，微分もできる，もう一回微分もできる（$\mathbf{A}$ は微分可能だから）とすることは考え及ばなかったのである。もちろん，A.-B. の論文にはそんなことは書いてなかった。そのことがAB効果に対する反論を呼び起したのだろう。思い出すと，京都の研究会では χ のジャンプの話がいくつか出たようだった。

有限長コイルではコイルの外側を逆流する磁場があるから，ことがらは上のように簡単ではない。その場合はむしろ外村氏のリングについて述べたような考察をすることが適当であろう。

追記

1. 直線状磁場に電子波が当るときの解を私自身で求めてみました。$A_\theta = -(\hbar c/e)\,\alpha/r$ ととると（前出の $A_\theta = (\hbar c/e)\,\alpha/2\pi r$ は $-1/2\pi$ の因子だけ誤り），入射波は

$$\psi_{inc} = e^{-i(\alpha\theta + kr\cos\theta)}$$

となり，これを $-\pi < \theta < \pi$ に対してフーリエ展開すると

$$e^{-i(\alpha\theta + kr\cos\theta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta},$$

$$a_m = (-i)^{|\alpha+m|} J_{|\alpha+m|}(kr) + \frac{\sin|\alpha+m|\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-|\alpha+m|\eta + ikr\cosh\eta}\,d\eta$$

となる。これに $e^{im\theta}$ をかけて m で加えると，次の式がすぐに出る：

$$e^{-i(\alpha\theta + kr\cos\theta)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|\alpha+m|} J_{|\alpha+m|}(kr)\, e^{im\theta}$$

$$+ \frac{\sin\alpha'\pi}{\pi} e^{im'\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-\alpha'\eta + ikr\cosh\eta} / (1 + e^{-\eta + i\theta}) \right] d\eta.$$

ここに $1 > \alpha' = \alpha + m' > 0$，$m'$ は整数。

上記の式を $\psi_{inc}=\psi-\psi_{scat}$，$\therefore\ \psi=\psi_{inc}+\psi_{scat}$ とかくと，ψ は求める解（Aharonov-Bohmに出ている解）です。

ψ_{scat} の漸近形は上の積分から容易に求められて

$$\psi_{scat}\sim-\sin\alpha'\pi\frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi ikr}}\frac{e^{i(m'-1/2)\theta}}{\cos(\theta/2)}\qquad(-\pi<\theta<\pi)$$

となる。A.-B.には $\alpha'=\alpha\,(m'=0)$ として全体の符号を逆にしたもの（ミスプリント？）が出ている。

また上記積分は θ が π をこえて $-\pi$ へ移るとき"とび"を与え，結局 $\psi=\psi_{inc}+\psi_{scat}$ は一価連続関数になることが示される。

ψ_{scat} は $\theta=\pi$ を除き $r\to\infty$ で消えるから，そのとき $\psi\sim\psi_{inc}$ となる。$\theta>0$ 側の ψ_{inc} と $\theta<0$ 側の ψ_{inc} を，ビームをまげる装置で干渉させれば，AB効果が観測される。なお，$\psi_0=e^{i\alpha\theta}\times\psi$ であり，$(\psi_0)_{inc}$ は平面波。そして $(\psi_0)_{inc}$ の例えば $\theta>0$ 部分をまげて $\theta<0$ 部分と干渉させれば，まげられたビームは $\theta=\pi$ を通過するとき，A の δ 関数的な山をこすので位相をかえ，干渉結果は ψ_{inc} で考えたときと同じになる。以上の干渉効果の説明は高橋秀俊氏の教示による。

2. 外村氏の実験の解釈はどうも簡単でないようである。はじめに書いたことは正しいかどうか分らない。ともかく，ring magnet の image を作り，その image の所で image を通る波と参照波（入射波を分離したもの）を干渉させる。ring magnet 自体の所で干渉させるとすれば，参照波もAの影響を受けて，結局何もおきない筈である。

Ring magnet 附近の波の様子（波面の様子）がそのまま image の所に写されるのであるとすると，ψ をとった場合の干渉の模様は次のようになるであろう。この ψ は，リング状の磁石をめぐる連続なA，遠くで 1/（距離）よりも速く消えるAに対応する解である。ψ は入射側でも透過側でも，遠くで純平面波である。リング面の附近では，リング内とリング外の ψ の位相差は（flux)/2 に相当している。磁石が不透明であるとすると，リング内とリング外を通る波は，進むにつれて flux 分の位相差をもつようになるだろう（磁石幅よりも遠い距離で）。やがてリングのかげが回折でぼけてくる所［（磁石幅）^{2}/（電子波波長）の距離の所］あたりから，ψ は次第に平面波になるだろう。またもしも磁石が透明であると，磁石を透過した波が加わるから，ψ の平面波への帰復は早くに起きるだろうと思う。外村氏の実験はこのような ψ と参照波の干渉をみているのである。リングからどれほどの距離の所の干渉を見ているのか，その距離を色々変えることによって干渉の変化をみることはできないか，などの疑問が起きる。

また ψ_0 をとって上と同じようなことを考えてみると，これはまた全く違った干渉が予期される。ψ_0 を作るには，リング磁石の下面から下方に無限にのびるシリンダー面をとり，これ

にAをおしこむ。そうすると，ψ_0は$\psi \times \exp[-i(e/\hbar c)\int \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}]$にひとしい。但しこの積分は，ある点（例えば入射側の無限遠点）から考えている点までの積分である。（直線磁場の場合の$\psi_0 = e^{i\alpha\theta}\psi$に相当する関係である。）この$\psi_0$では，リング内外を通る波について，$\psi$でできる位相差が消されている。また透過側の遠い点で，ψが平面波になった所では，逆にψ_0に負の位相差ができている。このようなψ_0の波がリングのimageの所で再現されるものならば，それと参照波の干渉はψと参照波の干渉とは全く異なるものになる。

やはりimage formationはcurrent jの幾何光学によってなされ，波は，localにA＝0としたときの実物のまわりの波がimageの所で再現されるのだろうか？

追追記

どうも追記の2に書いたことは間違っている。大変頭の悪いことで申訳ない。

リング状マグネットを通る波ψについては，書いた通りであるが，リングの内を通った波とリングの外を通った波がflux分だけ位相差を作ったあとでimageを形成するのであるから，imageの所では，この位相差を持ったままである。位相が波の進行につれて変わるときは波面の間隔が変わるのであるから，実物のリングが平面でも，imageではリングは平面でなく，内がへこんだものになっている（波長の数倍ほど）。次に，imageを通りぬけた波に参照波を干渉させてホログラムを作る。このホログラムにはimageの各点から出た波と参照平面波の干渉模様が記録される。実際には，さらに数千倍に拡大して写真乾板のホログラムを作り，これにレーザー光をあてて，レンズによってimageを再生する。この再生した像（少しへこんだ像）には，元のimageの所の波の位相も再生されている。再生像にレーザーの参照波をあてて干渉模様を作るのであるから，flux分の位相差が見られるのである。再生像をdefocusして元のimageの前後を再生しても，位相差には変化がないだろう。

私の誤りは，実物からimageを作るときに実物附近の波の様子がimageにもちこされるだろうと考えたことにある。

ψによって考えたときは以上でもう誤りないと思う。しかしψ_0によって考えたときは，同じ結論になる筈であるが，実は，どうしてよいのか分らない。ψ波ではリング内外を通る部分に位相差ができるが，リングの蔭の所でψは連続につながる。これに反して，ψ_0波ではリング内外を通るとき位相差ができず，蔭の所で不連続になる。即ち，いつのまにか位相差ができる。これがimageにもちこまれたとき，どうなるのだろう。