物性研究 41－6 (1984－3)

# スピン対称性の自発的破れが粒子－正孔対励起のボソン展開に与える影響について

埼玉大・理・物理　関　誠一

(1984年2月6日受理)

## 要旨

スピン対称性の破れたフェルミ粒子系に対して，粒子－正孔対励起のボソン表示を導出する。スピン反転を伴わない低波数の粒子－正孔対励起に対応した双一次フェルミ演算子は1ボソン演算子で表現でき，このような励起に対しては系の次元に関係なく朝永公式に類似した表式の成立することが示される。また，スピン反転を伴った粒子－正孔対励起のボソン化から，Stoner ギャップの存在が対励起のボソン表示に重要な影響を与えることを指摘する。

## §1 導入

ボソン像に基づいた数学的方法は，多体系の物理学の諸分野に於いて長足の進歩を遂げている。Holstein-Primakoff [1] 及び Dyson [2] の方法による局在スピンのボソン展開や，朝永理論 [3] による Fermi 粒子系の低エネルギー粒子－正孔対励起を1ボソン生成演算子で表示する所謂朝永公式は，固体物理学に於けるボソン法のパイオニア的役割を果たすと共に，種々の物理量の計算に援用されている。

朝永公式として良く知られているように，一次元 Fermi 粒子系では

$$B_q = \sum_k \frac{1}{\sqrt{q}} \psi^\dagger_{k+q/2} \psi_{k-q/2} \tag{1.1}$$

が成立する。ここで，$\psi^\dagger_k$，$B^\dagger_q$ はそれぞれ運動量 $k$，$q$ の電子とボソンの生成演算子であり，Fermi 運動量を $k_F$ として $q \ll k_F$，$k+q/2 > k_F$，$k-q/2 < k_F$ が満たされる。文献 3) に於いて，式 (1.1) は粒子密度揺動の交換関係と系の1次元性を考慮して導出されており，より高い次元でのボソン表示を得るためには文献 3) とは異ったアプローチが必要になる。以下では，Belaev [4] －丸森 [5] の方法を基礎にして，任意の次元に於ける粒子－正孔対励起のボソン

SEKI, Seiichi.

表示を系統的に求めるひとつのアプローチを提案する。一般論に従えば，Fermi 演算子をボソン化するためには次の3つの要素を自己無撞着的に確定することが必要である。[6]

1) Fermi 演算子の作用する空間

2) ボソン演算子の作用する空間

3) Fermi 空間に於ける状態ベクトルをボソン空間に於ける状態ベクトルに変換する演算子T。この演算子はユニタリー的であることが要請される。

系の磁化が零でスピン対称性が保たれている時，スピン反転を伴った粒子－正孔対励起とスピン反転を伴わない対励起に対するボソン表示の間に本質的な差は生じない。ボソン表示における上述の差は，スピン対称性が自発的に破れた状態或いは外部磁場の存在する状態の時，顕著になる。磁化によって，粒子－正孔対励起のボソン表示がどのように変化するか調べることも以下の議論の目的のひとつである。

我々の考察する電子場の演算子は $\psi_\sigma$ によって与えられる。但し，$\sigma$ はスピンを表す添字である。電子系には $\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma$ 及び $\psi_\sigma^\dagger \psi_{-\sigma}$（それぞれ粒子数密度揺動，スピン密度揺動に対応）で記述される二つの特徴的な励起が存在する。その時，双一次形式の電子場はスピン0及び1を担う二種類のボソン場 $B^{(0)}$，$B^{(1)}$ によって展開される。しかしながら，$B^{(0)}$ が粒子数密度揺動に，また $B^{(1)}$ がスピン密度揺動に正確に対応していると断定することはできない。実際，$\psi_\sigma^\dagger \psi_\sigma$ のボソン展開の高次項には $B^{(0)}$ と $B^{(1)}$ の混り合った形式で表現されるものもある。$\psi_\sigma^\dagger \psi_{-\sigma}$ についても同様である。

変換演算子Tを用いれば，Fermi 演算子のボソン化は

$$\mathrm{T} F_\psi \mathrm{T}^\dagger = F_\mathrm{B} \tag{1.2}$$

で記述される。ここで，$F_\psi$，$F_\mathrm{B}$ はそれぞれ電子場，ボソン場の汎関数である。式(1.2)は両辺の行列要素の同等性を意味しており，場の理論の言葉を借りれば〝弱い関係〟と呼ぶことができる。式(1.2)に対応して，ハミルトニアンは次のように変換される。

$$\mathrm{T H}_\psi \mathrm{T}^\dagger = \mathrm{H}_\mathrm{B} \tag{1.3}$$

$F_\psi$ の統計力学的平均がトレース演算子 Tr と温度の逆数 $\beta$ を用いて

$$< F_\psi > = \mathrm{Tr}\,[\,F_\psi \exp(-\beta \mathrm{H}_\psi)\,] / \mathrm{Tr}\,[\,\exp(-\beta \mathrm{H}_\psi)\,] \tag{1.4}$$

で与えられることに注意すると，$\mathrm{T}^\dagger \mathrm{T} = 1$ が成立する時，任意の Fermi 系の物理量はボソン化されたハミルトニアンの枠組の中で計算できることが分かる。こうして，Fermi 演算子

を完全にボソン化するためには変換演算子Tのユニタリー的性質が必要になってくる。

## §2 変換演算子の導出

この節では，系の状態がスピン対称性の保たれた常磁性状態にあるものとして，スピン添字を省略したフェルミ粒子系の粒子－正孔対励起を考察する。1個の粒子－正孔対を生成する演算子$\psi_k^\dagger \psi_{k'}$（但し，Fermi 運動量を$k_F$とし，$k > k_F$，$k' < k_F$）を基底状態$|G>$に連続的に作用すると種々の励起状態が得られる。例えば

$$
\begin{aligned}
&|k_1+q_1/2,\ k_1-q_1/2\,;\ \cdots\,;\ k_n+q_n/2,\ k_n-q_n/2> \\
&\quad = \prod_{i=1}^{n} \psi^\dagger_{k_i+q_i/2}\,\psi_{k_i-q_i/2}\,|G> \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

は$n$個の粒子－正孔対を持つ状態である（但し，$k_i+q_i/2 > k_F$，$k_i-q_i/2 < k_F$）。

一般に系のハミルトニアンは，無摂動，摂動部分をそれぞれ$\mathrm{H}_0$，$\mathrm{H}_{\mathrm{int}}$とすると

$$
\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_{\mathrm{int}}\ ;\ \mathrm{H}_0 = \sum_k \varepsilon_k\, \psi_k^\dagger \psi_k \qquad (2.2)
$$

で与えられる。$\varepsilon_k$は一電子エネルギーを表す。以下の議論では$\mathrm{H}_{\mathrm{int}}$の具体的な表式が必要になることはない。系の粒子数はハミルトニアンHの下で常に保存される。状態(2.1)は固有値

$$
\sum_{i=1}^{n} \left( \varepsilon_{k_i+q_i/2} - \varepsilon_{k_i-q_i/2} \right) \qquad (2.3)
$$

を持つ$\mathrm{H}_0$の固有状態である。粒子－正孔対に対応した双一次演算子の作用するヒルベルト空間$\Omega_1$は，$\mathrm{H}_0$のすべての固有状態で張ることができるものとする。任意の粒子－正孔対励起は$\mathrm{H}_0$の固有状態の一次結合で表される。いま，

$$
\begin{aligned}
|n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{E}} &= N_{\mathrm{E}}(n,\,q) \prod_{i=1}^{n} \sum_{\langle k_i q_i \rangle} \delta(q-q_1-\cdots-q_n) \\
&\quad \times g^{\lambda}(k_1-q_1/2,\cdots,\ k_n-q_n/2\,;\,k_1+q_1/2,\cdots,\ k_n+q_n/2) \\
&\quad \times \psi^\dagger_{k_i+q_i/2}\,\psi_{k_i-q_i/2}\,|G> \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

で与えられる状態を考えよう。$n$，$q$，$N_{\mathrm{E}}(n,\,q)$は，それぞれ励起対数，状態運動量，規格化定数を表し，$\lambda$は関数$g$を指定する添字である。運動量についての和記号$\sum\limits_{\langle k_i q_i \rangle}$は，

$$\sum_{\langle k_i q_i \rangle} = \sum_{k_i, q_i} \theta(k_i + q_i/2 - k_F)\,\theta(k_F - (k_i - q_i/2))$$

$$\times w(k_i + q_i/2)\,w(k_i - q_i/2), \tag{2.5}$$

但し

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \text{ の時} \\ 0 & x < 0 \text{ の時} \end{cases} \tag{2.6}$$

である。関数 $w(x)$ は重みを表し，バンドの外では零になる。従ってバンドの最上端，最下端に対応した運動量をそれぞれ $k_u$，$k_d$ とすれば

$$w(x) = \begin{cases} 1 & k_d < x < k_u \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{2.7}$$

で与えられる。ここで

$$h^{\mu}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \sum_{\lambda} a^{\mu}_{\lambda}\, g^{\lambda}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) \tag{2.8}$$

で定義された関数系 $h^{\mu}$ を導入しよう。その時係数 $a^{\mu}_{\lambda}$ を適当に選べば

$$\sum_{\lambda} h^{\lambda *}(x'_1, \cdots, x'_n; y'_1, \cdots, y'_n)\, g^{\lambda}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \delta(x'_i - x_i)\,\delta(y'_i - y_i) \tag{2.9}$$

が成り立つようにできる。式(2.8)を式(2.9)に代入して

$$\sum_{\lambda\lambda'} a^{\lambda}_{\lambda'}\, g^{\lambda' *}(x'_1, \cdots, x'_n; y'_1, \cdots, y'_n)\, g^{\lambda}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \delta(x'_i - x_i)\,\delta(y'_i - y_i) \tag{2.10}$$

を得る。この時，次式が容易に導かれる。

$$N_{\mathrm{E}}(n;q)^{-1}\sum_{\lambda}h^{\lambda *}(k_1-q_1/2,\cdots,k_n-q_n/2;k_1+q_1/2,\cdots,k_n+q_n/2)$$

$$\times|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\psi^{\dagger}_{k_i+q_i/2}\psi_{k_i-q_i/2}|G> \tag{2.11}$$

こうして式(2.1)で与えられる$\mathrm{H}_0$の固有状態は式(2.4)で定義された$|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$の適当な一次結合で表すことが可能である。このことは，ヒルベルト空間$\Omega_1$を$|k_1+q_1/2,k_1-q_1/2;\cdots;k_n+q_n/2,k_n-q_n/2>_{\mathrm{E}}$に代って$|n;q;\lambda>$で張ることができることを意味している。更に

$$f^{\lambda}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\sum_{\mu}b^{\lambda}_{\mu}g^{\mu}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n) \tag{2.12}$$

で表される関数系$f^{\lambda}$を導入し，係数$b^{\lambda}_{\mu}$を適当に選んで

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{\langle x_i y_i\rangle}f^{\lambda *}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$$

$$\times f^{\lambda'}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)=\delta_{\lambda\lambda'} \tag{2.13}$$

$$f^{\lambda}(\cdots x_i\cdots x_j\cdots;y_1,\cdots,y_n)$$

$$=-f^{\lambda}(\cdots x_j\cdots x_i\cdots;y_1,\cdots,y_n) \tag{2.14}$$

$$f^{\lambda}(x_1,\cdots,x_n;\cdots y_i\cdots y_j\cdots)$$

$$=-f^{\lambda}(x_1,\cdots,x_n;\cdots y_j\cdots y_i\cdots) \tag{2.15}$$

が成立するとしよう。式(2.14)，(2.15)は関数$f$が変数の置換に対して反対称的であることを意味している。このような反対称性は，例えば

$$f^{\lambda}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$$

$$=A(\{x,y\})\exp\{\mathrm{i}\,\phi^{\lambda}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)\} \tag{2.16}$$

$$A(\{x,y\})=\prod_{i<j}^{n}[\theta(x_i-x_j)-\theta(x_j-x_i)]$$

$$\times[\theta(y_i-y_j)-\theta(y_j-y_i)] \tag{2.17}$$

とおけば満たされる。但し，$\phi^{\lambda}$ は変数の置換に対して対称な実関数である。上で定義した関数 $f$ を用いて表される状態

$$|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}=N_{\mathrm{E}}(n;q)\prod_{i=1}^{n}\sum_{\langle k_i q_i\rangle}\delta(q-q_1-\cdots-q_n)$$

$$\times f^{\lambda}(k_1-q_1/2,\cdots,k_n-q_n/2;k_1+q_1/2,\cdots,k_n+q_n/2)$$

$$\times\psi^{\dagger}_{k_i+q_i/2}\psi_{k_i-q_i/2}|G> \tag{2.18}$$

を考えよう。式(2.11)，(2.12) から，ヒルベルト空間 $\Omega_1$ をすべて可能な $n$，$q$，$\lambda$ の値の $|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$ で張ることもできる。そこで以下の議論では状態空間を回転して $|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$ が $\Omega_1$ の基礎ベクトルになるようにしよう。$\mathrm{H}_0$ の固有状態のひとつ，たとえば，

$$\psi^{\dagger}_{k+q/2}\psi_{k-q/2}|G>$$

は，$|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$ の１次結合

$$\psi^{\dagger}_{k+q/2}\psi_{k-q/2}|G>=\sum_{\lambda}\sum_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(k-k')}\psi^{\dagger}_{k'+q/2}\psi_{k'-q/2}|G>$$

$$=\sum_{\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda k}|1;q;\lambda>_{\mathrm{E}} \tag{2.19}$$

で表すことができる。$|n;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$ の規格化定数 $N_{\mathrm{E}}(n;q)$ は，式(2.14)，(2.15) から導かれる関係

$$f^{\lambda}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\mathcal{P}^{n}_{\alpha}\mathcal{P}^{n}_{\beta}f^{\lambda}(x_{\alpha_1},\cdots,x_{\alpha_n};y_{\beta_1},\cdots,y_{\beta_n}) \tag{2.20}$$

但し，

$$\mathcal{P}_\zeta^n=\begin{cases}1, & \text{セット}(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)\text{がセット}(1,2,\cdots,n)\text{の偶置換から求められる時}\\ -1, & \text{その置換が奇置換の時}\end{cases} \tag{2.21}$$

を用いて

$$N_E(n;q)=[n!\prod_{i=1}^{n}\sum_{\langle k_i q_i\rangle}\delta(q-q_1-\cdots-q_n)]^{-1/2} \tag{2.22}$$

であることが示される。この時

$${}_E\langle n;q;\lambda|n';q';\lambda'\rangle_E=\delta_{nn'}\delta_{qq'}\lambda_{\lambda\lambda'} \tag{2.23}$$

が成立する。

いま

$$\begin{aligned}T=|G\rangle\langle G|\sum_n\prod_{i=1}^{n}\sum_{\langle k_i q_i\rangle}\sum_\lambda h^{(n)}(q_1+q_2+\cdots+q_n)\\ \times f^{\lambda *}(k_1-q_1/2,\cdots,k_n-q_n/2;k_1+q_1/2,\cdots,k_n+q_n/2)\\ \times B^\dagger_{\lambda q_i}\psi^\dagger_{k_i-q_i/2}\psi_{k_i+q_i/2}|0\rangle_{BB}\langle 0|\end{aligned} \tag{2.24}$$

で定義される変換演算子Tを導入する。ここで$B^\dagger_{\lambda q}$はボソン生成演算子であり，$|0\rangle_B$はボソンのフォック空間に於ける真空状態を表す。従って，交換関係

$$\begin{aligned}[B_{\lambda q},B^\dagger_{\lambda' q'}]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{qq'}\\ [B_{\lambda q},B_{\lambda' q'}]=0\end{aligned} \tag{2.25}$$

と共に

$$B_{\lambda q}|0\rangle_B=0 \tag{2.26}$$

が成立する。以下で示されるように，関数$h$の具体的表式はTに対するいくつかの要請から決定される。そのひとつは，二つの状態の積$|0\rangle_B|n;q;\lambda\rangle_E$がTによって$|n;q;\lambda\rangle_B|G\rangle$に変換するという要請である。すなわち

$$\mathrm{T}\,|\,0>_{\mathrm{B}}|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{E}}=|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{B}}|\,G> \tag{2.27}$$

ここで，$|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{B}}$ はボソンのフォック空間における励起状態を表す。式(2.18)，(2.24)を式(2.27)に代入して

$$|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{B}}=(n\,!)^2 N_{\mathrm{E}}(n\,;q)\prod_{i=1}^{n}\sum_{\langle k_i q_i\rangle}\delta(q-q_1-\cdots-q_n)$$

$$\times h^{(n)}(q_1+\cdots+q_n)\,\mathrm{B}^{\dagger}_{\lambda q_i}\,|\,0>_{\mathrm{B}} \tag{2.28}$$

となる。更にTの正準共役演算子

$$\mathrm{T}^{\dagger}=|\,0>_{\mathrm{BB}}<0\,|\sum_{n}\prod_{i=1}^{n}\sum_{\langle k_i q_i\rangle}\sum_{\lambda}h^{(n)}(q_1+\cdots+q_n)$$

$$\times f^{\lambda}(k_1-q_1/2,\,\cdots,\,k_n-q_n/2\,;k_1+q_1/2,\,\cdots,\,k_n+q_n/2)$$

$$\times \mathrm{B}_{\lambda q_i}\,\psi^{\dagger}_{k_i+q_i/2}\,\psi_{k_i-q_i/2}\,|\,G> \tag{2.29}$$

は

$$\mathrm{T}^{\dagger}\,|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{B}}|\,G>=|\,0>_{\mathrm{B}}|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{E}} \tag{2.30}$$

を満たすとする。この時，式(2.27)，(2.30)から $h^{(n)}$ が求められ，$n=1,\,2$ に対しては次のようになる。

$$h^{(1)}(q)=\{\sum_{\langle kq\rangle}{}'\}^{-1/2} \tag{2.31}$$

$$h^{(2)}(q)=(2\,!\,\sqrt{2}\,)^{-1}\{\sum_{\langle k_1 q_1\rangle}\sum_{\langle k_2 q-q_1\rangle}{}'\}^{-1/2}$$

$$\times\{\sum_{\langle k_1 q_1\rangle}(\sum_{\langle k_2 q-q_1\rangle}{}'\sum_{\langle k'_1 q\rangle}{}'\sum_{\langle k'_2 q-q_1\rangle})\}^{-1/2} \tag{2.32}$$

ここで，$\sum_{\langle kq\rangle}{}'$ は，

$$\sum_{\langle kq\rangle}{}'=\sum_{k}\theta(k+q/2-k_{\mathrm{F}})\,\theta(k_{\mathrm{F}}-(k-q/2))\,w(k+q/2)\,w(k-q/2) \tag{2.33}$$

で定義された和記号である。$n\geqq 3$ の $h^{(n)}$ も同じような方法で得られる。このようにして求められた $h^{(n)}$ を式(2.28)に使うと，$|\,n\,;q\,;\lambda>_{\mathrm{B}}$ に対する規格化条件

$$_{B}<n;q;\lambda|n';q';\lambda'>_{B}=\delta_{nn'}\delta_{qq'}\delta_{\lambda\lambda'} \tag{2.34}$$

の成立することが確かめられる。

## §3　ボソン展開

この節では前節で求めた変換演算子Tを利用して粒子－正孔対のボソン表示を導出する。

$T^{\dagger}T$はヒルベルト空間$\Omega_1$に於いてユニット演算子の役割をする。実際，式(2.27)の正準共役

$$_{E}<n;q;\lambda|_{B}<0|T^{\dagger}=<G|_{B}<n;q;\lambda| \tag{3.1}$$

と式(2.27)それ自身を組合せれば

$$\begin{aligned}&_{E}<n;q;\lambda|_{B}<0|T^{\dagger}T|0>_{B}|n;q;\lambda>_{E}\\&=<G|_{B}<n;q;\lambda|n';q';\lambda'>_{B}|G>\\&=\delta_{nn'}\delta_{qq'}\delta_{\lambda\lambda'}\end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。この関係は，$T^{\dagger}T$が$\Omega_1$に於いてユニット演算子であることを示している。同様にして，$TT^{\dagger}$はすべての可能な$n$，$q$，$\lambda$の値の$|G>|n;q;\lambda>_{B}$で張られたヒルベルト空間$\Omega_2$に於いて単位演算子の役割をすることが証明される。電子数はどのような過程でも保存されるとして，$H_0$の固有状態に対し次の完全性条件が成立する。

$$\begin{aligned}&|G><G|+\sum_{k_1q_1}|k_1+q_1/2,\ k_1-q_1/2><k_1+q_1/2,\ k_1-q_1/2|\\&+\sum_{k_1q_1}\sum_{k_2q_2}|k_1+q_1/2,\ k_1-q_1/2;k_2+q_2/2,\ k_2-q_2/2>\\&\times<k_1+q_1/2,\ k_1-q_1/2;k_2+q_2/2,\ k_2-q_2/2|\\&+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3.3}$$

上式に於いて状態$|k_1+q_1/2,\ k_1-q_1/2;\cdots;k_n+q_n/2,\ k_n-q_n/2>$の位相変換，すなわち，

$$|k_1+q_1/2, k_1-q_1/2 ; \cdots ; k_n+q_n/2, k_n-q_n/2>$$

$$\to f^{\lambda}(k_1-q_1/2, \cdots, k_n-q_n/2 ; k_1+q_1/2, \cdots, k_n+q_n/2)$$

$$\times |k_1+q_1/2, k_1-q_1/2 ; \cdots ; k_n+q_n/2, k_n-q_n/2> \tag{3.4}$$

を行なえば,

$$|G><G|+\sum_n\sum_\lambda\sum_q |n ; q ; \lambda>_{EE}<n ; q ; \lambda|=1 \tag{3.5}$$

が導かれる。

ここで, $\Omega_1$ に於いて作用する任意の演算子を $\mathrm{O_p}$ とした時, 次式が導かれることに注意しよう。

$$_{E}<n ; q ; \lambda|_{B}<0|\mathrm{O_p}|0>_{B}|n' ; q' ; \lambda'>_{E}$$

$$=<G|_{B}<n ; q ; \lambda|\widetilde{\mathrm{O}}_{\mathrm{p}}|n' ; q' ; \lambda'>_{B}|G> \tag{3.6}$$

但し, $\widetilde{\mathrm{O}}_{\mathrm{p}}$ は $\Omega_2$ に於いて作用する演算子であり, $\widetilde{\mathrm{O}}_{\mathrm{p}}=\mathrm{T}\mathrm{O_p}\mathrm{T}^{\dagger}$ で与えられる。従って

$$\widetilde{\mathrm{O}}_{\mathrm{p}}=|0>_{B}<G|\mathrm{O_p}|G>_{B}<0|$$

$$+\sum_{n\geqq 1}\sum_\lambda\sum_q\{|0>_{B}<G|\mathrm{O_p}|n ; q ; \lambda>_{EB}<n ; q ; \lambda|$$

$$+|n ; q ; \lambda>_{BE}<n ; q ; \lambda|\mathrm{O_p}|G>_{B}<0|\}$$

$$+\sum_{n,n'\geqq 1}\sum_{qq'}\sum_{\lambda\lambda'}|n ; q ; \lambda>_{BE}<n ; q ; \lambda|\mathrm{O_p}|n' ; q' ; \lambda'>_{E}$$

$$\times_{B}<n' ; q' ; \lambda'| \tag{3.7}$$

が成立する。

このようにして得られた関係を利用して粒子－正孔対励起に対するボソン表示が求められる。式(2.18), (2.28), (3.7) から

$$\psi^{\dagger}_{k+q/2}\psi_{k-q/2}=h^{(1)}(q)\sum_{\lambda}f^{\lambda}(k-q/2\,;\,k+q/2)\,\mathrm{B}^{\dagger}_{\lambda q}$$

$$+h^{(2)}(q)\sum_{Q}\sum_{\langle k_1 q_1\rangle}\sum_{\lambda\lambda'}h^{(1)}(q)$$

$$\times f^{\lambda}(k-q/2,\,k_1-q_1/2,\,k+q/2,\,k_1+q_1/2)$$

$$\times f^{\lambda'}(k_1-q_1/2,\,k_1+q_1/2)\,\mathrm{B}^{\dagger}_{\lambda q_1}\mathrm{B}^{\dagger}_{\lambda Q-q_1}\mathrm{B}_{\lambda' Q-q}+\cdots \quad (3.8)$$

となる。但し，$k+q/2>k_{\mathrm{F}}$，$k-q/2<k_{\mathrm{F}}$ であり，点々で表された部分はボソン演算子の高次の項に対応している。ボソン展開(3.8)の第一項が $h^{(1)}(q)$ に比例することに注意しよう。$q\to 0$ の極限，或いは電子のバンド幅が十分に小さく従って$q$も小さな値に限られる時 $h^{(1)}(q)$ は $q^{-1/2}$ 特異性を示し $n\geqq 2$ の $h^{(n)}(q)$ に比べて著しく大きな値をとる。この時，ボソン展開に於いて $h^{(1)}(q)$ に比例する項だけを拾い集めれば

$$\psi^{\dagger}_{k+q/2}\psi_{k-q/2}=h^{(1)}(q)\sum_{\lambda}f^{\lambda}(k-q/2\,;\,k+q/2)$$

$$\times\mathrm{B}^{\dagger}_{\lambda q}(1+\mathrm{F}[\mathrm{n_B}]-\mathrm{F}[0]) \quad (3.9)$$

となることが示される。ここでFは励起ボソン数演算子 $\mathrm{n_B}$ の関数である。これまでの定式化から，粒子－正孔対の少ない電子系の状態は励起ボソン数の小さい状態に対応していることが分かる。従って式(3.9)から，弱い励起状態では $1+\mathrm{F}[\mathrm{n_B}]-\mathrm{F}[0]\cong 1$ として，

$$\mathrm{B}^{\dagger}_{\lambda q}=\sum_{\langle kq\rangle}{}'\frac{1}{\sqrt{q}}f^{\lambda}(k-q/2\,;\,k+q/2)\,\psi^{\dagger}_{k+q/2}\psi_{k-q/2} \quad (3.10)$$

が導かれる。これは，朝永公式として良く知られる関係と本質的には同等である。朝永公式は系の一次元性を利用して導かれたものであるが，本論文では特に系の次元を指定することなく低波数の粒子－正孔対演算子の一次結合を1ボソン生成演算子で表すことができた。式(3.9)は波数 $q$ が小さい場合にのみ成立する。大きい $q$ に対しては高次のボソン項も重要になってくる。このような高次項は，式(3.8)で示されているように，系統的に求めることが可能である。

## §4　スピン対称性の破れた状態でのボソン展開

この節ではスピン空間に於ける対称性の破れた状態，すなわち，系が有限の磁化を持つ状態での粒子－正孔対に対するボソン展開を考察する。簡単のため，系の基底状態は完全強磁性で

あるとする。ここで，完全強磁性とは，すべての電子のスピンがある特定の方向に配列した状態のことである。不完全強磁性の場合の取扱いは付録1で与えられる。

基底状態が完全強磁性状態の時，演算子 $\psi^{\dagger}_{k\uparrow}\psi_{k'\uparrow}$（但し，$k>k_{\mathrm{F}}^{+}$; $k'<k_{\mathrm{F}}^{+}$）及び $\psi^{\dagger}_{k\downarrow}\psi_{k'\downarrow}$（但し，$k>k_{\mathrm{F}}^{-}$，$k'<k_{\mathrm{F}}^{+}$）の組合せから種々の粒子・正孔対励起状態をつくることができる。ここで，$\psi_{k\sigma}$ はスピン $\sigma$，運動量 $k$ の電子消滅演算子であり，$k_{\mathrm{F}}^{+}$（$k_{\mathrm{F}}^{-}$）は上向きスピン（下向きスピン）電子の Fermi 運動量である。基底状態 $|G>$ では，すべての電子のスピンは $\sigma=\uparrow$，すなわち，上向きにあるとする。

$$k_i+q_i/2>k_{\mathrm{F}}^{+},\ k_i-q_i/2<k_{\mathrm{F}}^{+},\ k_j+q_j/2>k_{\mathrm{F}}^{-},\ k_j-q_j/2<k_{\mathrm{F}}^{+}$$

とすると，

$$|k_1+q_1/2\uparrow,\ k_1-q_1/2\uparrow;\cdots\cdots;k_n+q_n/2\downarrow,\ k_n-q_n/2\uparrow>$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\psi^{\dagger}_{k_i+q_i/2\uparrow}\psi_{k_i-q_i/2\uparrow}\psi^{\dagger}_{k_j+q_j/2\downarrow}\psi_{k_j-q_j/2\uparrow}|G> \tag{4.1}$$

は $m$ 個の singlet 対，及び（$n-m$）個の triplet 対から成る粒子ー正孔対励起状態である。但し，singlet 対，triplet 対とはそれぞれ，上向きスピン電子ー上向きスピン正孔対，下向きスピン電子ー上向きスピン正孔対のことを意味している。§2での議論と同様に，すべての可能な $m$，$n$，$q$，$\lambda$ の値を持つ。

$$|m,\ n-m;q;\lambda>_{\mathrm{E}}$$

$$=N_{\mathrm{E}}(m,\ n-m;q)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=m+1}^{n}\sum_{\langle k_iq_i\rangle}\sum_{\langle\langle k_jq_j\rangle\rangle}\delta(q-q_1-\cdots-q_n)$$

$$\times f^{\lambda}(k_1-q_1/2,\ \cdots,\ k_n-q_n/2;k_1+q_1/2,\ \cdots,\ k_n+q_n/2)$$

$$\times\psi^{\dagger}_{k_i+q_i/2\uparrow}\psi_{k_i-q_i/2\uparrow}\psi^{\dagger}_{k_j+q_j/2\downarrow}\psi_{k_j-q_j/2\uparrow}|G> \tag{4.2}$$

で張られたヒルベルト空間 $\Omega_1$ を考える。ここで，$\sum_{\langle\langle k_jq_j\rangle\rangle}$ は

$$\sum_{\langle\langle k_jq_j\rangle\rangle}=\sum_{k_j,\,q_j}\theta(k_j+q_j/2-k_{\mathrm{F}}^{-})\,\theta(k_{\mathrm{F}}^{+}-(k_j-q_j/2))$$

$$\times w(k_j+q_j/2)\,w(k_j-q_j/2) \tag{4.3}$$

で定義された和記号であり，$\sum_{\langle k_i q_i\rangle}$ は式(2.5)で与えられるものと同じである。$|m, n-m; q; \lambda>_E$ に対する規格化条件から，容易に

$$N_E(m, n-m; q)$$

$$=[m!(n-m)!n! \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=m+1}^{n} \sum_{\langle k_i q_i\rangle} \sum_{\langle\langle k_j q_j\rangle\rangle} \delta(q-q_1-\cdots-q_n)]^{-1/2} \quad (4.4)$$

が導かれる。

今，

$$T=|G><G| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=m+1}^{n} \sum_{\langle k_i q_i\rangle} \sum_{\langle\langle k_j q_j\rangle\rangle} \sum_{\lambda} h^{(m, n-m)}(q_1+\cdots+q_n)$$

$$\times f^{\lambda *}(k_1-q_1/2, \cdots, k_n-q_n/2; k_1+q_1/2, k_n+q_n/2)$$

$$\times B^{(0)\dagger}_{\lambda q_i} \psi^{\dagger}_{k_i-q_i/2\uparrow} \psi_{k_i+q_i/2\uparrow}$$

$$\times B^{(1)\dagger}_{\lambda q_j} \psi^{\dagger}_{k_j-q_j/2\uparrow} \psi_{k_j+q_j/2\downarrow} |0>_{BB}<0| \quad (4.5)$$

で定義された変換演算子を導入する。$B^{(0)\dagger}$, $B^{(1)\dagger}$ はボソン生成演算子を表し，次の交換関係を満足する。

$$[B^{(0)}_{\lambda q}, B^{(0)\dagger}_{\lambda' q'}]=[B^{(1)}_{\lambda q}, B^{(1)\dagger}_{\lambda' q'}]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{qq'} \text{（それ以外の交換関係は零）} \quad (4.6)$$

$B^{(0)}$, $B^{(1)}$ はそれぞれ singlet 対， triplet 対に対応したボソン演算子である。Tは2つの状態の積 $|0>_B|m, n-m; q; \lambda>_E$ を次の様に変換する。

$$T|0>_B|m, n-m; q; \lambda>_E$$

$$=|m, n-m; q; \lambda>_B|G> \quad (4.7)$$

ここで，$|m, n-m; q; \lambda>_B$ はボソンの Fock 空間に於ける励起状態を表し，

$$|m, n-m; q; \lambda>_B$$

$$=m!(n-m)!n!N_E(m, n-m; q)$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=m+1}^{n} \sum_{\langle k_i q_i \rangle} \sum_{\langle\langle k_j q_j \rangle\rangle} \delta(q - q_1 - \cdots - q_n)$$

$$\times h^{(m,\, n-m)}(q_1 + \cdots + q_n) \mathrm{B}^{(0)\dagger}_{\lambda q_i} \mathrm{B}^{(1)\dagger}_{\lambda q_j} |0>_{\mathrm{B}} \tag{4.8}$$

で与えられる。また，Tの正準共役$\mathrm{T}^{\dagger}$は，

$$\mathrm{T}^{\dagger} | m,\ n-m ; q ; \lambda >_{\mathrm{B}} | G >$$

$$= | 0 >_{\mathrm{B}} | m,\ n-m ; q ; \lambda >_{\mathrm{E}} \tag{4.9}$$

を満足するものとする。この関係式から，

$$h^{(1,0)}(q) = \{ \sum_{\langle kq \rangle}{}' \}^{-1/2} \tag{4.10}$$

$$h^{(0,1)}(q) = \{ \sum_{\langle\langle kq \rangle\rangle}{}' \}^{-1/2} \tag{4.11}$$

$$h^{(2,0)}(q) = (2!\sqrt{2})^{-1} \{ \sum_{\langle k_1 q_1 \rangle} \sum_{\langle k_2 q - q_1 \rangle}{}' \}^{1/2}$$

$$\times \{ \sum_{\langle k_1 q_1 \rangle} ( \sum_{\langle k_2 q - q_1 \rangle}{}' \sum_{\langle k_1' q_1 \rangle}{}' \sum_{\langle k_2' q - q_1 \rangle}{}' ) \}^{-1/2} \tag{4.12}$$

$$h^{(1,1)}(q) = \{ \sum_{\langle k_1 q_1 \rangle} \sum_{\langle\langle k_2 q - q_1 \rangle\rangle}{}' \}^{1/2}$$

$$\times \{ \sum_{\langle k_1 q_1 \rangle} ( \sum_{\langle\langle k_2 q - q_1 \rangle\rangle}{}' \sum_{\langle k_1' q_1 \rangle}{}' \sum_{\langle\langle k_2' q - q_1 \rangle\rangle}{}' ) \}^{-1/2} \tag{4.13}$$

$$h^{(0,2)}(q) = (2!\sqrt{2})^{-1} \{ \sum_{\langle\langle k_1 q_1 \rangle\rangle} \sum_{\langle\langle k_2 q - q_1 \rangle\rangle}{}' \}^{1/2}$$

$$\times \{ \sum_{\langle\langle k_1 q_1 \rangle\rangle} ( \sum_{\langle\langle k_2 q - q_1 \rangle\rangle}{}' \sum_{\langle\langle k_1' q \rangle\rangle}{}' \sum_{\langle\langle k_2' q - q_1 \rangle\rangle}{}' ) \}^{-1/2} \tag{4.14}$$

などが導かれる。

式(4.9)よりヒルベルト空間$\Omega_1$に作用する任意の演算子$\mathrm{O_p}$に対して

$${}_{\mathrm{E}}< m,\ n-m ; q ; \lambda | {}_{\mathrm{B}}< 0 | \mathrm{O_p} | 0 >_{\mathrm{B}} | m',\ n'-m' ; q' ; \lambda' >_{\mathrm{E}}$$

$$= \langle G|_{B}\langle m,\ n-m\,;q\,;\lambda|\widetilde{O}_p|m',\ n'-m'\,;q'\,;\lambda'\rangle_B|G\rangle \tag{4.15}$$

が成立する。但し，$\widetilde{O}_p = TO_pT^{\dagger}$である。こうして，式(3.7)に対応した関係

$$\begin{aligned}
\widetilde{O}_p &= |0\rangle_B\langle G|O_p|G\rangle_B\langle 0| \\
&+ \sum_{n\geqq 1}\sum_{m\geqq 0}\sum_{q}\sum_{\lambda}\{|0\rangle_B\langle G|O_p|m,\ n-m\,;q\,;\lambda\rangle_E \\
&\times\langle m,\ n-m\,;q\,;\lambda|+|m,\ n-m\,;q\,;\lambda\rangle_B \\
&\times{}_E\langle m,\ n-m\,;q\,;\lambda|O_p|G\rangle_B\langle 0|\} \\
&+ \sum_{n\geqq 1}\sum_{n'\geqq 1}\sum_{m\geqq 0}^{n}\sum_{m'\geqq 0}^{n'}\sum_{qq'}\sum_{\lambda\lambda'}|m,\ n-m\,;q\,;\lambda\rangle_B \\
&\times{}_E\langle m,\ n-m\,;q\,;\lambda|O_p|m',\ n'-m'\,;q\,;\lambda\rangle_E \\
&\times{}_B\langle m',\ n'-m'\,;q'\,;\lambda'|
\end{aligned} \tag{4.16}$$

が得られる。

$$O_p = \psi^{\dagger}_{k+q/2\uparrow}\psi_{k-q/2\uparrow}\ (\text{但し，}\ k+q/2 > k_F^{+},\ k-q/2 < k_F^{+})$$

を上式に代入すれば

$$\begin{aligned}
\psi^{\dagger}_{k+q/2\uparrow}\psi_{k-q/2\uparrow} &= h^{(1,0)}(q)\sum_{\lambda}f^{\lambda}(k-q/2,\ k+q/2)\,B^{(0)\dagger}_{\lambda q} \\
&+ h^{(2,0)}(q)\sum_{Q}\sum_{\langle k_1q_1\rangle}\sum_{\lambda\lambda'}h^{(1,0)}(q_1)f^{\lambda *}(k-q/2, \\
&k_1-q_1/2\,;k+q/2,\ k_1+q_1/2) \\
&\times f^{\lambda'}(k_1-q_1/2,\ k_1+q_1/2 \\
&\times B^{(0)\dagger}_{\lambda q_1}B^{(0)\dagger}_{\lambda Q-q_1}B^{(0)}_{\lambda' Q-q} + \cdots\cdots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

が導かれる。同様に，

$$\mathrm{O_p} = \psi^{\dagger}_{k+q/2\downarrow}\psi_{k-q/2\uparrow} \quad (\text{但し，} \ k+q/2 > k_F^-, \ k-q/2 < k_F^+)$$

と置けば，

$$\psi^{\dagger}_{k+q/2\downarrow}\psi_{k-q/2\uparrow} = h^{(0,1)}(q)\sum_{\lambda} f^{\lambda}(k-q/2, \ k+q/2)\,\mathrm{B}^{(1)}_{\lambda q}$$

$$+ h^{(0,2)}(q)\sum_{Q}\sum_{\langle k_1 q_1\rangle}\sum_{\lambda\lambda'} h^{(0,1)}(q_1)$$

$$\times f^{\lambda *}(k-q/2, \ k_1-q_1/2 \,;\, k+q/2, \ k_1+q_1/2)$$

$$\times f^{\lambda}(k_1-q_1/2, \ k_1+q_1/2)$$

$$\times \mathrm{B}^{(0)\dagger}_{\lambda q_1}\mathrm{B}^{(1)\dagger}_{\lambda Q-q_1}\mathrm{B}^{(1)}_{\lambda' Q-q} + \cdots\cdots \tag{4.18}$$

が導かれる。式(4.17)，(4.18) の右辺に於ける点々は高次のボソン項を表す。前節での議論と同様に，小さい $q$ に対する $h^{(1,0)}(q)$ の $q^{-1/2}$ 特異性を示すことができる。従って，$q \ll 1$の時，式(3.10) に類似した式

$$\mathrm{B}^{(0)\dagger}_{\lambda q} = \sum_{\langle kq\rangle}{}' \frac{1}{\sqrt{q}} f^{\lambda}(k-q/2 \,;\, k+q/2)\,\psi^{\dagger}_{k+q/2\uparrow}\psi_{k-q/2\uparrow} \tag{4.19}$$

が成立する。しかしながら，$h^{(0,1)}(q)$ は小さい $q$ に対して $q^{-1/2}$ 特異性を持たず，従ってボソン展開(4.18) に於いて $h^{(0,1)}(q)$ に比例した項だけを拾い集める操作は，正しい取扱いとは言えなくなる。この時には，十分小さな $q$ に対してさえ

$$\mathrm{B}^{(1)\dagger}_{\lambda q} = \sum_{\langle kq\rangle}{}' \frac{1}{\sqrt{q}} f^{\lambda}(k-q/2, \ k+q/2)\,\psi^{\dagger}_{k+q/2\uparrow}\psi_{k-q/2\downarrow} \tag{4.20}$$

という関係は成立しない。このような singlet 及び triplet 粒子－正孔対に対するボソン表示の定性的な相異は，スピン対称性の自発的破れによる Stoner ギャップの存在に起因している。

## §5 要 約

これまでに我々は，粒子－正孔対に対応した双一次形式の Fermi 演算子をボソン演算子で展開するひとつの方法を提案し，朝永公式に類似したいくつかの関係式を導出した。得られたボソン展開の表式から，低波数の singlet 対（粒子と正孔のスピンが同じ対）は系の次元に関

係なく1ボソン生成演算子の一次結合で表現できること，また，スピン対称性の自発的に破れた状態での triplet 対（粒子と正孔のスピンが異なる対）のボソン表示は低波数であっても1ボソン生成演算子の一次結合で与えられず，高次のボソン項が必要になってくることを見てきた。

ボソンの Fock 空間に於ける1ボソン状態，$B_q^{(0)\dagger}|0>_B$，$B_q^{(1)\dagger}|0>_B$ は，かならずしも観測可能な（observable）状態ではない。実際，系のハミルトニアンをこのようなボソン演算子で対角化することは不可能である。観測可能な状態は，$B^{(0)}$，$B^{(1)}$ の組合せで記述される非常に多数のボソン状態の一次結合で表される。強い Coulomb 相互作用をもった電子気体に現われるスピン波やプラズマモードは観測可能なボソン状態の例であるが，このような状態を $B_q^{(0)}$，$B_q^{(1)}$ で記述することは現理的に可能である。

これまでに得られたボソン展開は，完全性条件（3.3）または（3.5）の成立する制限された Hilbert 空間に於いてのみ有効である。換言すれば，これらのボソン展開は，任意の粒子－正孔対励起が式（2.1）または（2.4）で与えられる基礎状態ベクトルの一次結合で表現されるという仮定の下で成立する。しかしながら，これらの基礎状態ベクトルでは表せない状態を導入しても関数 $h^{(1,0)}(q)$ の $q^{-1/2}$ 特異性などが影響を受けることはなく，式（3.9）で与えられる双一次演算子とボソン演算子の対応はそのまま成立する。

系の温度が有限の時，Fermi 演算子の作用する Hilbert 空間を温度に依存しない基礎状態ベクトルに代って温度に依存したベクトルで置き換えることができる。その時，Fermi 演算子に対するボソン表示は温度の影響を受けることになる。なぜなら，一般にこのようなボソン表示は行列成分の間で成立するいわゆる弱い関係だからである。温度効果によってボソン展開の各項はそれぞれ影響を受けるが，低温である限り低次項の特徴は不変である。

## 付　録　1

ここでは不完全（部分）強磁性状態に於いて粒子－正孔対励起をボソン展開する手続きについて説明する。不完全強磁性とは，上向き及び下向きスピン電子が共に存在し，どちらかのスピン方向の電子数がより多くなっている状態のことである。この場合，§4で考えた粒子－正孔対の他に

$$\psi_{k\downarrow}^{\dagger}\psi_{k'\downarrow}(k>k_F^-,\ k'<k_F^-) \tag{A.1}$$

$$\psi_{k\uparrow}^{\dagger}\psi_{k'\downarrow}(k>k_F^+,\ k'<k_F^-) \tag{A.2}$$

で与えられる対励起も出現する。但し，$k_F^-$ は下向きスピン電子の Fermi 運動量を表す。

(A.1) と (A.2) に対応したボソン演算子を $\overline{\mathrm{B}}^{(0)\dagger}$, $\overline{\mathrm{B}}^{(1)\dagger}$ で表し，変換演算子を次の形で定義する。

$$\mathrm{T}=|G><G|\sum_{M_4\geqq 0}\prod_{i=1}^{M_1}\prod_{j=M_1+1}^{M_2}\prod_{m=M_2+1}^{M_3}\prod_{n=M_3+1}^{M_4}$$

$$\times\sum_{\langle k_i q_i\rangle}\sum_{\langle\langle k_j q_j\rangle\rangle}\bar{\sum_{\langle k_m q_m\rangle}}\bar{\sum_{\langle\langle k_n q_n\rangle\rangle}}\sum_{\lambda}$$

$$\times h^{(M_1,M_2,M_3,M_4)}(q_1+\cdots+q_{M_4})$$

$$\times f^{\lambda *}(k_1-q_1/2,\ \cdots,\ k_{M_4}-q_{M_4}/2\,;\,k_1+q_1/2,\ \cdots,\ k_{M_4}+q_{M_4}/2)$$

$$\times \mathrm{B}^{(0)\dagger}_{\lambda q_i}\psi^{\dagger}_{k_i-q_i/2\uparrow}\psi_{k_i+q_i/2\uparrow}\mathrm{B}^{(1)\dagger}_{\lambda q_j}\psi^{\dagger}_{k_j-q_j/2\uparrow}\psi_{k_j+q_j/2\downarrow}$$

$$\times \mathrm{B}^{(0)\dagger}_{\lambda q_m}\psi^{\dagger}_{k_m-q_m/2\downarrow}\psi_{k_m+q_m/2\downarrow}\mathrm{B}^{(1)\dagger}_{\lambda q_n}\psi^{\dagger}_{k_n-q_n/2\downarrow}\psi_{k_n+q_n/2\uparrow}$$

$$\times|0>_{\mathrm{B}\,\mathrm{B}}<0| \tag{A.3}$$

但し，$\bar{\sum\limits_{\langle kq\rangle}}$, $\bar{\sum\limits_{\langle\langle kq\rangle\rangle}}$ は

$$\bar{\sum_{\langle kq\rangle}}=\sum_{k,\ q}\theta(k+q/2-k_{\mathrm{F}}^{-})\,\theta(k_{\mathrm{F}}^{-}-(k-q/2))$$

$$\times w(k+q/2)\,w(k-q/2) \tag{A.4}$$

$$\bar{\sum_{\langle\langle kq\rangle\rangle}}=\sum_{k,\ q}\theta(k+q/2-k_{\mathrm{F}}^{+})\,\theta(k_{\mathrm{F}}^{-}-(k-q/2))$$

$$\times w(k+q/2)\,w(k-q/2) \tag{A.5}$$

で与えられる和記号である。更に，式 (4.2) に対応して

$$|M_1,M_2,M_3,M_4\,;\,q\,;\,\lambda>_{\mathrm{E}}$$

$$=N_{\mathrm{E}}(M_1,M_2,M_3,M_4\,;\,q)\prod_{i=1}^{M_1}\prod_{j=M_1+1}^{M_2}\prod_{m=M_2+1}^{M_3}\prod_{n=M_3+1}^{M_4}$$

$$\times \sum_{\langle k_i q_i \rangle} \sum_{\langle\langle k_j q_j \rangle\rangle} \bar{\sum_{\langle k_m q_m \rangle}} \bar{\sum_{\langle\langle k_n q_n \rangle\rangle}} \delta(q - q_1 - \cdots - q_{M_4})$$

$$\times f^{\lambda}(k_1 - q_1/2, \cdots, k_{M_4} - q_{M_4}/2; k_1 + q_1/2, \cdots, k_{M_4} + q_{M_4}/2)$$

$$\times \psi^{\dagger}_{k_i+q_i/2\uparrow} \psi_{k_i-q_i/2\uparrow} \psi^{\dagger}_{k_j+q_j/2\downarrow} \psi_{k_j-q_j/2\uparrow}$$

$$\times \psi^{\dagger}_{k_m+q_m/2\downarrow} \psi_{k_m-q_m/2\downarrow} \psi^{\dagger}_{k_n+q_n/2\uparrow} \psi_{k_n-q_n/2\downarrow} |G> \tag{A.6}$$

を導入する。ここで

$$N_{\mathrm{E}}(M_1, M_2, M_3, M_4) = [(M_1 - M_3 + M_4)!\, M_2!\, (M_4 - M_2)!$$

$$\times (M_3 - M_1)! \prod_{i=1}^{M_1} \prod_{j=M_1+1}^{M_2} \prod_{m=M_2+1}^{M_3} \prod_{n=M_3+1}^{M_4}$$

$$\times \sum_{\langle k_i q_i \rangle} \sum_{\langle\langle k_j q_j \rangle\rangle} \bar{\sum_{\langle k_m q_m \rangle}} \bar{\sum_{\langle\langle k_n q_n \rangle\rangle}}$$

$$\times \delta(q - q_1 - \cdots - q_{M_4})]^{-1/2} \tag{A.7}$$

である。同様に，式(4.8)に対応して

$$|M_1, M_2, M_3, M_4; q; \lambda>_{\mathrm{B}}$$

$$= (M_1 - M_3 + M_4)!\, M_2!\, (M_4 - M_2)!\, (M_3 - M_1)!$$

$$\times N_{\mathrm{E}}(M_1, M_2, M_3, M_4; q) \prod_{i=1}^{M_1} \prod_{j=M_1+1}^{M_2} \prod_{m=M_2+1}^{M_3} \prod_{n=M_3+1}^{M_4}$$

$$\times \sum_{\langle k_i q_i \rangle} \sum_{\langle\langle k_j q_j \rangle\rangle} \bar{\sum_{\langle k_m q_m \rangle}} \bar{\sum_{\langle\langle k_n q_n \rangle\rangle}} \delta(q - q_1 - \cdots - q_{M_4})$$

$$\times h^{(M_1, M_2, M_3, M_4)}(q)\, \mathrm{B}^{(0)\dagger}_{\lambda q_i} \mathrm{B}^{(1)\dagger}_{\lambda q_j} \bar{\mathrm{B}}^{(0)\dagger}_{\lambda q_m} \bar{\mathrm{B}}^{(1)\dagger}_{\lambda q_n} |0>_{\mathrm{B}} \tag{A.8}$$

を導入し，

$$\mathrm{T}|0>_{\mathrm{B}} |M_1, M_2, M_3, M_4; q; \lambda>_{\mathrm{E}}$$

$$= |M_1, M_2, M_3, M_4 ; q ; \lambda>_B |G> \tag{A.9}$$

$$T^\dagger |M_1, M_2, M_3, M_4 ; q ; \lambda>_B |G>$$

$$= |0>_B |M_1, M_2, M_3, M_4 ; q ; \lambda>_B \tag{A.10}$$

が成立するように関数 $h^{(M_1, M_2, M_3, M_4)}(q)$ を定めれば，粒子－正孔対励起に対するボソン表示は §4 とまったく同様な方法で求められる。

## References


1) T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, (1940), 1098.

2) F. J. Dyson, Phys. Rev. **102**, (1956), 1217, 1230.

3) S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**. (1950), 554.

4) S. T. Belaev and V. G. Zelevinski, Sov. Phys. JETP, **15** (1962), 1006.

5) T. Marumori, Prog. Theor. Phys. **24**, (1960), 331.

6) P. Grabaczewski, Phys. Report, **36** (1978), 65.

及びそこで引用されている論文。