

三角格子 Heisenberg Spin系(有限系)の Chaos

福岡工大・教養

中村勝弘

最近、Hamilton力学系の Chaotic又は Irregularな挙動に関心が集まりつつある。天体力学における Henon-Heiles系や Anisotropic Kepler系の問題、更には、原子分子のレベルにおける、強磁場中の水素原子(7-Heisenberg)やシリコンのドナー不純物の irregularな量子準位分布の問題がその一例である。

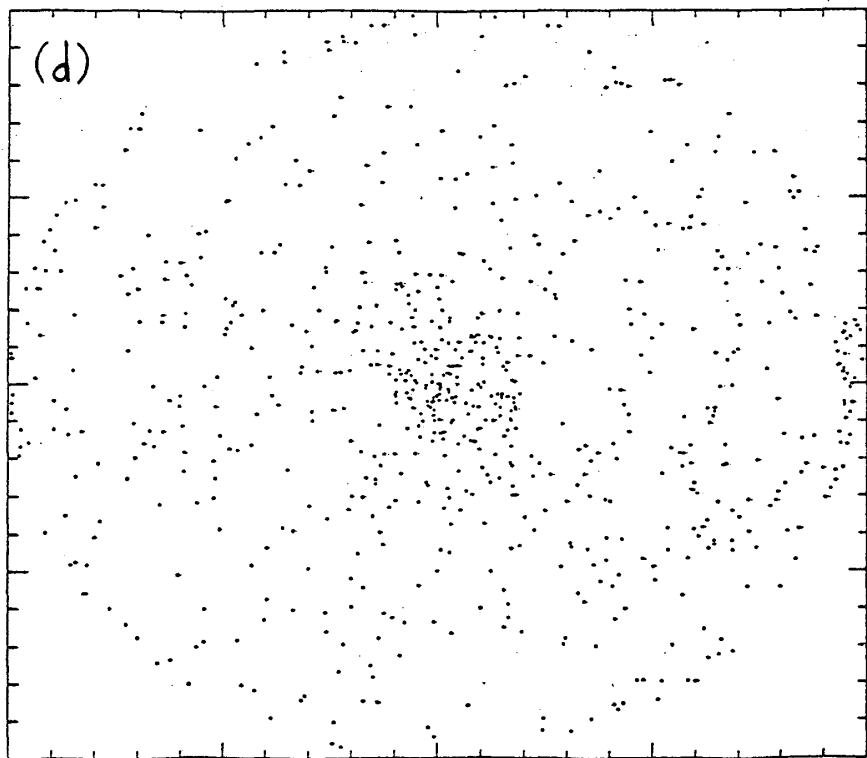
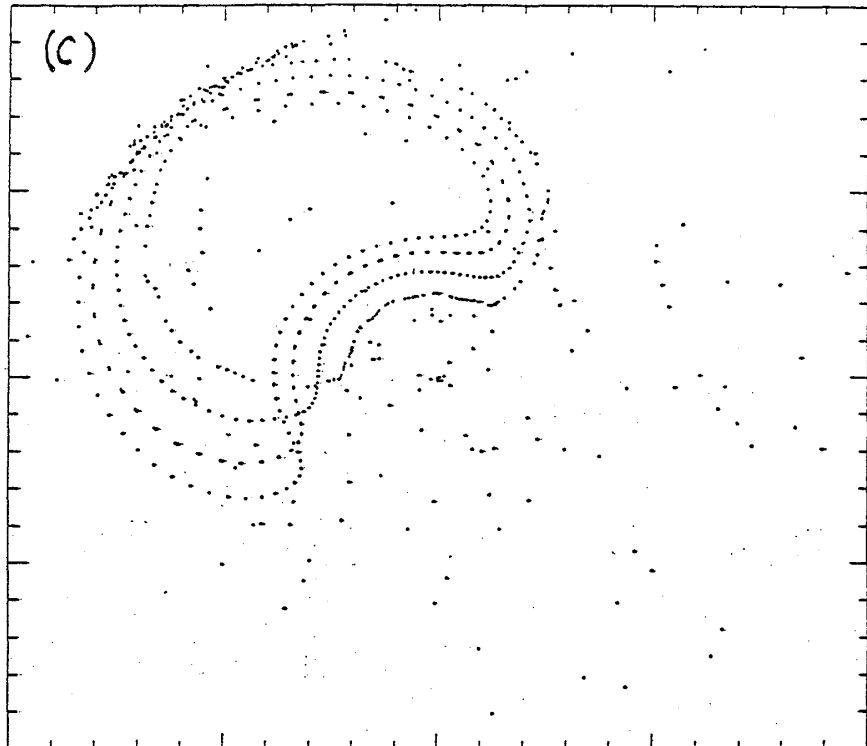
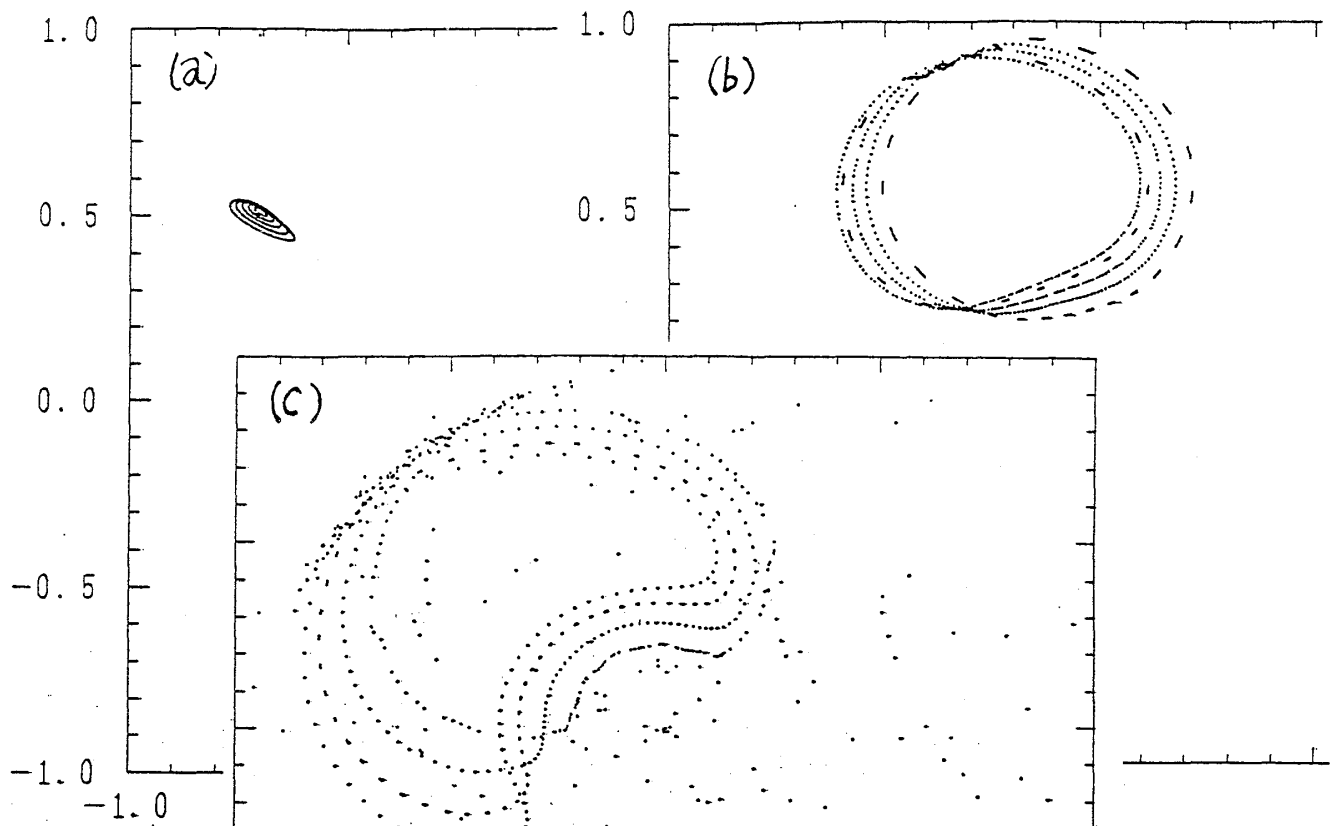
ここでは Solid Stateにおける Chaosの可能性をさぐる。まず、思いつくのが非線型相互作用で結合した調和振動子の格子である。Fermi-Pasta-Ulamによるこの系の数値研究は、一方において K.A.M.の概念を産み出し、他方において、高次の非線型項をとり入れることにより生じる完全可積分な Toda鎖を産み出した。しかし、Toda鎖(格子)は、とらまはす、soliton, phonon型以外の新しいタイプの状態 (Chaotic or Irregular States) をもたない。

我々は、XXZ型の交換相互作用で結合した古典 Heisenberg spin系を考える。1-d鎖の場合、spin $\frac{1}{2}$ の量子系は可積分であるが、spin $=\infty$ の古典系は非可積分である (Paddeev 1982)。そこで、まず、三角格子上の3個の古典 spin系を考える。これは、2-d三角格子 spin系の Chaosの研究の出発点であると同時に、1-d非可積分 spin鎖(格子)の研究の出発点でもある。結合は、XXZ型の Antiferro相互作用を仮定する。

この系は、energy E と磁化 M_z 以外の保存量を持たないの2次元相空間の自由度は4であり、Chaosが期待できる。以下 $M_z=0$ とする。格子 spin系の運動方程式よりえられる、変分に対する線型方程式の解析から、spin dynamicsの軌道の local stabilityがわかる。これは、Chaosの出現のための必要条件の考察にあたる。解析によると、高energy状態ではなく低energy状態で、指数関数的な変分の不安定成長が生じる。Local instabilityが生じる critical energyは、Heisenberg型から planar型に移行するに従い、上昇する。

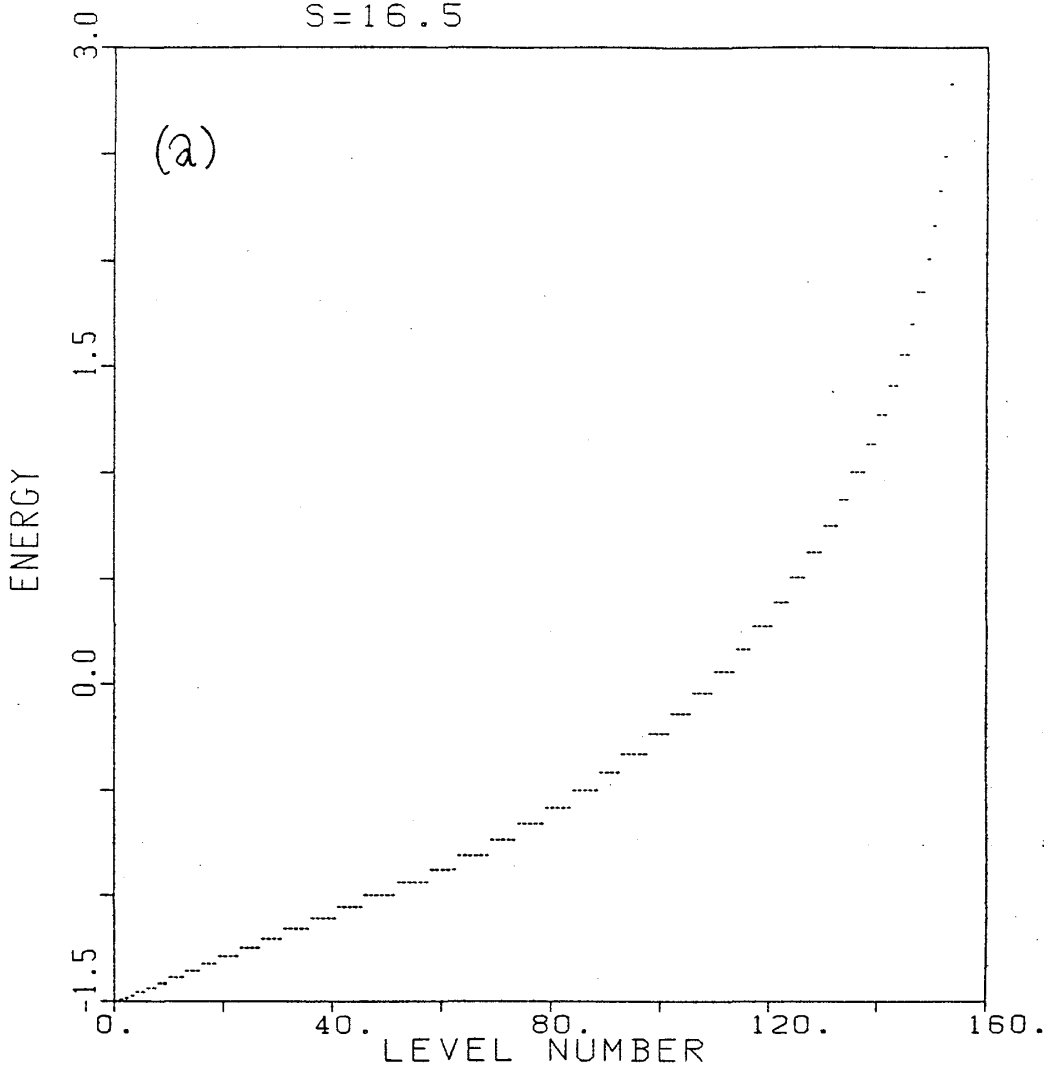
実際、高energy状態から energyを下げていきながら、spin dynamicsを数値的に調べ、Poincare surface of sectionで spin軌道の性質を調べると、Fig (a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) のようになる。図の各 stageで、それぞれ5種類の軌道の Poincare sectionの $S^1 \times S^1$ 面への projectionがえがかれている。I(c)図からわかるように、 $E=-1.204$ で K.A.M.の一部(5番目の軌道)が崩壊する。この軌道だけの長時間 runの結果が I(d)図である。Irregular orbitは、Poincare sectionの全域に広がっていることがわかる。

他方、基底状態(古典 spin系から、いわゆる $1/2^+$ 構造)から energyをあげていくと、spin wave 励起に対応した K.A.M.がまず形成され、ついで K.A.M.の一部が

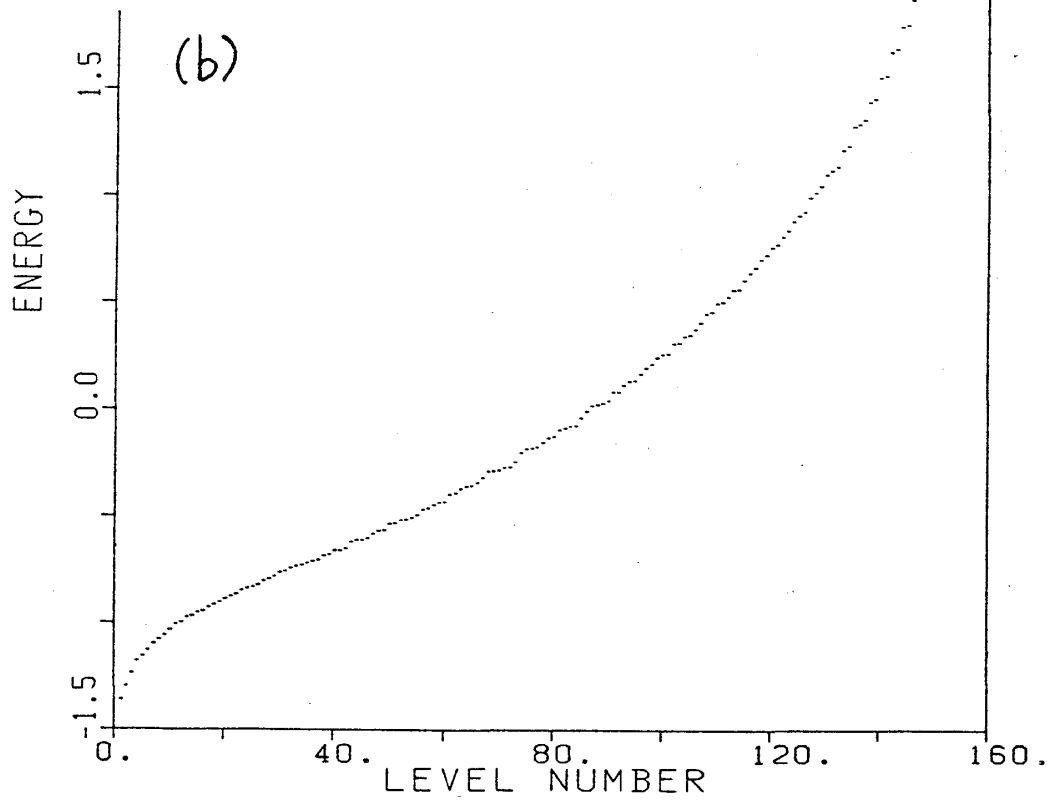


I ☒
 $\frac{dS_1^2}{dt} = 0$
 で定義された
 Poincaré section
 の $S_1^2 - S_1^2$ 面への
 projection
 (a) $E = 0.0$
 (b) $E = -1.175$
 (c) $E = -1.204$
 (d) $E = -1.204$
 但し、(d) は
 1種類の軌道

S=16.5



II 四
量子準位 ($S=16\frac{1}{2}$)
(a) Isotropic
Heisenberg model
(b) Planar model
(spin 半整数の
 $T \propto M_z = \frac{1}{2}$ の
manifold を採用)



崩れて chaos (Irregular orbit) が出現する。エネルギーを更にあげると、I(c), I(d) 図の励起状態に見られるような global chaos が形成される。spin wave (KAM.) の崩壊と chaos の形成は、低励起状態 ($E \approx -1.40$) で生じる。

このような irregular state は、強磁性結合の場合、少なくとも低励起状態では出現せず。三角格子 Antiferro に固有なものである。その意味は Frustration-induced chaos といえよう。この新しい動的状態は、少数個の spin cluster の関与する観測 (例えば NMR の spectral broadening) とかがわってくる。

ここで対応する量子系では何が期待できるか、又、その半古典極限で、いかなる理論的問題が生じるかは大変興味深い。

我々は、 $S = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ と増していき、spin の大きさの自乗 $S(S+1)$ で scale されたエネルギー準位を調べた。才 II 図は $S = 16\frac{1}{2}$ の時の量子準位を Isotropic Heisenberg model の時 (II(a)) と Planar model の時 (II(b)) について示している。

Manifold は、 K (全波数) $= 0$, $M_z = \frac{1}{2}$, even parity の states に限っている。

II(b) 図の低 energy 領域では、非可積分量子系に特有な準位間反発が支配的である。nearest neighbouring level spacing の分布を調べると、random matrix の場合と同様な Wigner 分布になることがわかった。そして、spin の大きさを更に大きくすると、この傾向は一層明白となる。他方、II(a) 図では、系の可積分性を反映して、準位の縮退が支配的である (注: 3個の spin 系の場合、Isotropic Heisenberg model は、 M_z の他に M_x, M_y も保存量である可積分となる)。

量子論から古典論への transition において、level 間隔の spin S への依存性は、Heisenberg model と Planar model とで異なる scaling 則に従うこともわかってきた。

Pauling の Resonating Valence Bond Theory により、三角格子量子 Antiferro の基底状態が説明されるというのは、P.W. Anderson の conjecture であるが、今、又、半古典極限での lattice spin 系の strange な挙動は、量子力学と非可積分古典力学を Chaos の概念で連関するという intriguing な研究分野を提供するようである。