

木の構造の発展方程式について

茨城大・工 安久 正 紘
理 横井 洋 太

§1 枝分かれの変分的考察

木の構造は植物に始まり、固体のひび割れ、電離なだれ現象など、自然界に広く存在するだけでなく、電力の送配電システム、情報の探索システムなどにも見られる。自然界における木の構造は外部からのエネルギーの流れ（植物の場合は太陽エネルギー、電離現象の場合は外部電場のエネルギー、固体のひび割れの場合は固体内のひずみエネルギー）の中に生じる散逸構造と見なせる。すなわち外部からエネルギーを取り込み、それを散逸することにより木の構造が成長し保たれている。植物の場合、枝の先端には光合成器官としての葉があり、ここから外部エネルギーを取り込んでいる。エネルギーの取り込む量 (G) は先端の数 (n) に比例して増加すると考えられるが、先端の数が多くなりすぎると葉と葉の重なりが生じ、結局エネルギーの取り込む量は飽和するものと考えられる。一方、呼吸作用によるエネルギーの消費量 (L) は植物体のパイプモデル理論¹⁾を考慮すれば、先端の数の増加につれてエネルギー消費量も増加すると考えられる。以上を概念的に描いたのが図1であり、正味のエネルギーの取り込み量

$G-L$ は枝の総数が n_{max} の時最大になり、 $G-L > 0$ の範囲では枝分かれ構造は成長するが、 $G-L = 0$ になると成長は止まると考えられる。固体中のひび割れの場合には、生じたき裂が持つ表面エネルギーを G に、き裂が生じたことによって開放される弾性ひずみエネルギーを L に対応させて考えることができる。

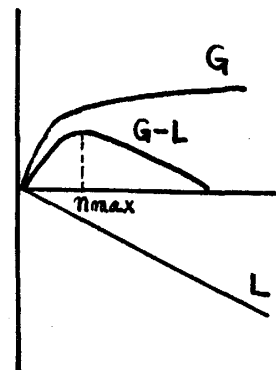


図1 エネルギー変分関数

§2 フィボナッチ木

植物の分枝構造の研究は群論による分類法の研究²⁾、計算機シミュレーションを用いて現実の分枝構造をモデル化する研究³⁾、確率的なLシステムを用いた分枝構造のモデル化の研究⁴⁾など先駆的な研究がなされているが、本小論ではけやきやえのきなどの大きい立木に見られる

フィボナッチ分枝（枝の先端の数が時間の経過につれてフィボナッチ数列に従って増加するもの、図2参照）に着目して、これの時間的发展を記述する方法について述べる。まず始めに枝の先端の年齢を先祖の幹から先端までの分岐の回数で定義する。例えば図3に示すような分枝の場合、各枝の先端に書いてあ

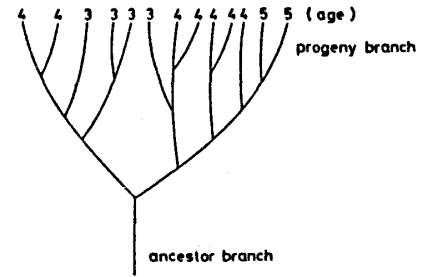


図2 年齢の定義

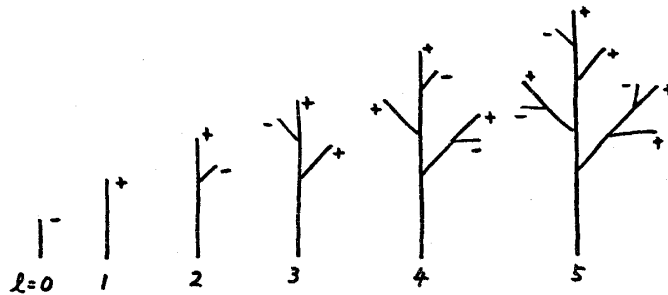


図3 フィボナッチ木

る数が年齢になる。時の経過を離散的に考え、ある時刻 t_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) において年齢が k 才の枝の総数を $n_k(t_l)$ とかくことにする。次に主芽が側芽に較べ優勢で分岐し易い枝 (+) と分岐しにくい枝 (-) を導入し、それぞれの枝の総数を $n_k^{(+)}(t_l)$, $n_k^{(-)}(t_l)$ と書くことにすれば、

$$n_k(t_l) = n_k^{(+)}(t_l) + n_k^{(-)}(t_l) \quad (1)$$

が成り立つ。分岐の活動度が (-) の枝は時間が1ステップたつと成長して (+) の枝に変わるものとし、さらに (+) の枝は各時間ステップ毎に2又分岐し、 (+) の枝と (-) の枝を生じることになれば、次のような発展方程式が得られる。

$$n_{k+1}^{(+)}(t_{l+1}) = n_{k+1}^{(-)}(t_l) + n_k^{(+)}(t_l) \quad (2)$$

$$n_{k+1}^{(-)}(t_{l+1}) = n_k^{(+)}(t_l) \quad (3)$$

(1), (2), (3) より次の関係式が示される。

$$n_k(t_l) = n_{k-1}(t_{l-1}) + n_{k-1}(t_{l-2}) \quad (4)$$

時間ステップが t_l における枝の総数 $n(t_l)$ は定義により

$$n(t_l) = \sum_k n_k^{(+)}(t_l) + n_k^{(-)}(t_l) \quad (5)$$

で与えられるから、(4)と(5)より、フィボナッチ数列, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... の漸化式,

$$n(t_l) = n(t_{l-1}) + n(t_{l-2}) \quad (6)$$

が得られる。(4)式と初期条件,

$$n^{(-)}(t_0) = 1, \quad n^{(+)}(t_0) = 0, \quad n^{(-)}(t_1) = 0, \quad n^{(+)}(t_1) = 1$$

を用いると、年齢が k 才の枝の数 $n_k(t_l)$ は

$$n_k(t_l) = \frac{(k-1)!(3k-l+1)}{(l-k-1)!(2k-l+1)} \quad (7)$$

と表わされる。(7)を用いて規格化された年齢分布関数

$$x_k(t_l) = n_k(t_l) / \sum_k n_k(t_l)$$

を求めたものが図4である。 $x_k(t_l)$ は t_l の増加と共に漸近的にガウス分布に近づくことが図4の結果より示される。

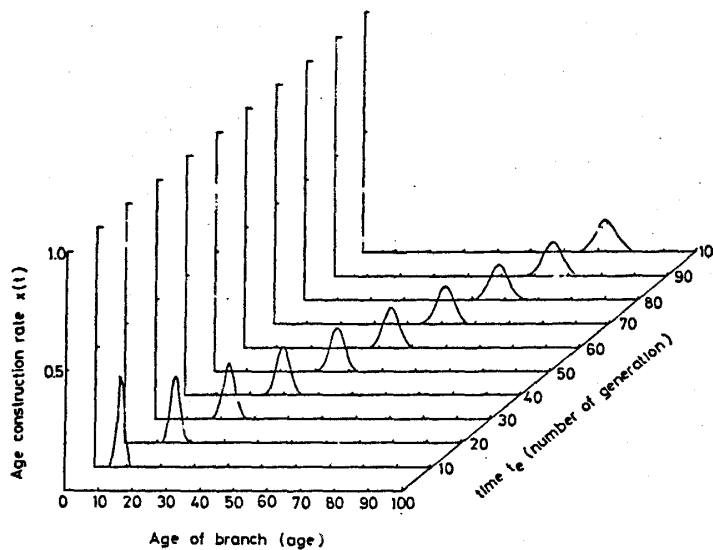


図4 年齢分布

一般に枝の分岐の活動度に s 個の段階, (---...---), ---(---), (---), (+) がある場合も同様な議論ができる。(4)に対応して

$$n_k(t_l) = n_{k-1}(t_{l-1}) + n_{k-1}(t_{l-s}) \quad (8)$$

が得られ、従って先端の数 $n(t_l)$ は

$$n(t_l) = n(t_{l-1}) + n(t_{l-s}) \quad (9)$$

を満たす一般化フィボナッチ数列に従って増加することになる。(8)を用いると $n_k(t_l)$ の一般項は、

$$n_k(t_l) = \sum_{\nu} C_{\nu} n_1(t_{l-k+1-\nu(s-1)}) \quad (10)$$

と求めることができる。ここで ν に関する和は、

$$s \leq l - k + 1 - \nu(s-1) \leq 2s - 1$$

を満たす整数 ν についておこない、年齢が1才の枝の数 n_1 は時刻 t_s で2になり、 t_{2s-1} までの他の時刻ではすべて1である。からまつやひのきなどの主軸性の強い樹形は枝の分岐の活動度のレベル数 s を3以上にとることにより表現することができると思われる。例えば $s=4$ (---, --, -, +) の場合の枝分かれの様子を図5に示す。

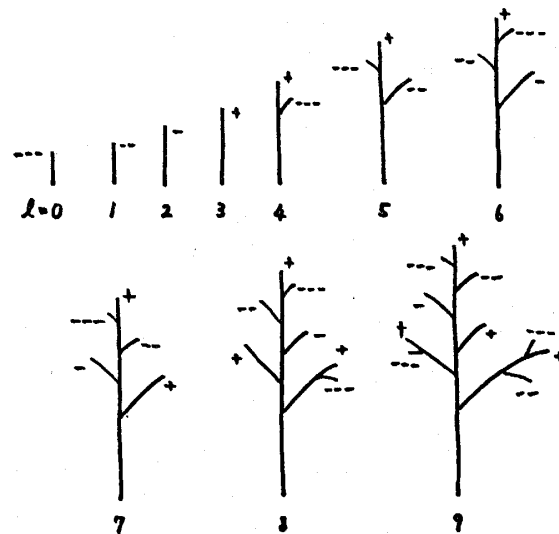


図5 主軸性の強い変形フィボナッチ木

§3 確率的枝分かれ構造の記述

前章で決定論的なフィボナッチ形分岐構造について述べたが、実際の樹形では確率的な要素も持っている。これを考慮するために、 k 才の(+)の枝が(+)と(-)に分岐する割合を r_k^+ 、 k 才の(-)の枝が(+)に変わる割合を r_k^- とし、さらにこの(-)の枝が枯死する割

安久 正紘・横井 洋太

合として w_k^- を導入すると⁵⁾, 発展方程式(2), (3) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} n_{k+1}^{(+)}(t_{l+1}) &= r_{k+1}^{(-)} n_{k+1}^{(-)}(t_l) + r_k^{(+)} n_k^{(+)}(t_l) \\ &\quad + (1 - r_{k+1}^{(+)}) n_{k+1}^{(+)}(t_l) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} n_{k+1}^{(-)}(t_{l+1}) &= r_k^{(+)} n_k^{(+)}(t_l) \\ &\quad + (1 - r_{k+1}^{(-)} - w_{k+1}) n_{k+1}^{(-)}(t_l) \end{aligned} \quad (12)$$

参考文献

- 1) S. Oohata and K. Shinozaki, Jap. J. Ecol. 29, 1979.
- 2) M. Shikata, J. of Humanities and Natural Sciences (Tokyo College of Economics) No. 47, 1979.
- 3) H. Honda, P. B. Tomlinson and J. B. Fisher Amer. J. Bot. 68(4), 569, 1981.
- 4) T. Nishida, Memoirs of the Faculty of Science, Kyoto University Series of Biology, vol. VIII, No. 1, 1980.
- 5) H. Honda 私信