

4. おわりに

以上は都市や地域に、積分幾何学や幾何確率を応用して得られた結果である。このような研究に着手した理由は、都市や地域を研究の対象としているうちに、次のような考えを抱くに至ったからである。

都市においては、一つの平面がいろいろな用途に使用されている。たとえば道路のように、そこを歩いてどこへでも行くことができることに意味のあるものもあれば、多くの建築物や緑地のように、そこにあることで一応の目的が達せられるものもある。限られた同一平面をこれらにあて、日々の活動をなんとか支えているということは、考えてみれば大変なことなのかもしれない。

最後に、多くの方達のご指導をお願いするとともに、本研究会に参加する機会を与えて下さった、小川泰先生に心から感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 腰塚武志：地域内距離, Journal of the Operations Research Society of Japan, vol. 21, No. 2 (1978), 302-319.
- 2) 腰塚武志：積分幾何学について(3), オペレーションズ・リサーチ, vol 21, No. 11 (1976), 654-659.
- 3) 腰塚武志：道路網と交差点, 都市計画, 103号(1978), 36-41.

ランダム・カッティングによるサイズ分布

東北大・工 原 啓 明

NY州大 藤 田 重 次

1 はじめに

種々の長さの要素から成る系を考える。各要素がカッティング、或いは再結合によって長さを変える場合、この効果により系(集団)のサイズ分布は変る。この長さの変化を伴うサイズ分布の問題は、晶析¹⁾、金属粉粒子の造粒²⁾、高分子の分裂³⁾等では重要なプロセスである。

ここでは、ある分布で特徴づけられたランダム・カッティングとその要素の再結合を考慮し

た系のサイズ分布の問題を一つの確率過程のモデルとして論ずる。

2. 形の変形を記述する方程式

形(長さ, l)を変える要素の位置 x , 時刻 t における分布関数を $n (= n(x, l, t))$ と表すと, 一般に領域 $v_1(t)$ 内にある要素の個数の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \int_{v_1} n dv = \int_{v_1} (B - D) dv, \quad (dv = dx dl) \quad (2.1)$$

と書ける。 B と D は単位時間当りの生成 (Birth) と消滅 (Death) プロセスを表す。従って B と D によるプロセス, C を n から差引いた $\tilde{n} = n - c$ は, 連続の式となる。以下ではこの連続の式を, 要素とその環境体との結合を要素のモードとして定式化する Coupled Random Walks (CRW)^{4,5)} によって導出する。この時, 要素 (Walker) のモードは長さ (サイズ) l を表す。簡単のため一次元で考える。原点から出発した Walker が N ステップ後にモード i の位置 m に到達する確率 $W^{(i)}(m, N)$ は, $N-1$ ステップにおける対応する確率

$$W^{(i-\beta \cdot 1)}(m + \alpha \cdot 1, N-1), \quad (\alpha, \beta = \pm 1)$$

とそこから $W^{(i)}(m, N)$ へと, “飛び移る確率”

$$P_{N-1}^{\alpha(i)}(m | m - \alpha \cdot 1), \quad \tilde{R}_{N-1}^{\beta(i, i-\beta \cdot 1)}(m | m)$$

によって, 漸化式

$$\begin{aligned} W^{(i)}(m, N) = & P_{N-1}^{+(i)}(m | m-1) W^{(i)}(m-1, N-1) \\ & + P_{N-1}^{-(i)}(m | m+1) W^{(i)}(m+1, N-1) \\ & + \tilde{R}_{N-1}^{+(i, i-1)}(m | m) W^{(i-1)}(m, N-1) \\ & + \tilde{R}_{N-1}^{-(i, i+1)}(m | m) W^{(i+1)}(m, N-1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

で表わされる。 $P^{\alpha(i)}$ と $\tilde{R}^{\beta(i, i-\beta \cdot 1)}$ はその定義から規格化条件:

$$\sum_{\alpha=\pm} P_{N-1}^{\alpha(i)}(m + \alpha \cdot 1 | m) + \sum_{\alpha=\pm} \tilde{R}_{N-1}^{\alpha(i+\alpha \cdot 1, i)}(m | m) = 1$$

を満す。形(長さ)を変えるプロセスが $\tilde{R}_{N-1}^{\alpha(i+\alpha \cdot 1, i)}$ によって

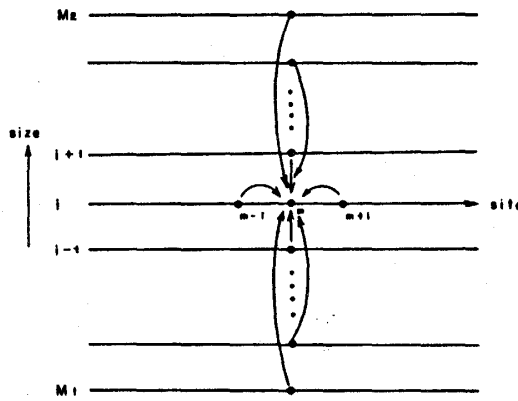
$$\tilde{R}_{N-1}^{\alpha(i, i-\alpha+1)}(m|m) = R^\alpha + \frac{\kappa}{W^{(i-\alpha+1)}(m, N-1)} \sum_{j=2}^{n_\alpha} C_{N-1}^{\alpha(i-\alpha+j)}(m) \quad (2.3)$$

$$(\kappa < 0, \quad \alpha = \pm, \quad M_2 = i + n_-, \quad M_1 = i - n_+)$$

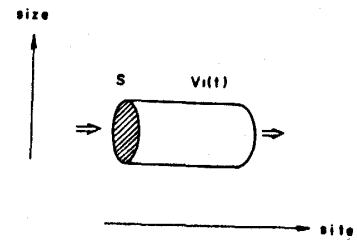
と記述されるものとする、(2.3)の右辺のカッティングの効果を表わす因子 $C_{N-1}^{-(i+j)}$ と再結合の効果を表す因子 $C_{N-1}^{+(i-j)}$ は、とび移る確率の規格化条件から

$$\sum_{j=2}^{n_+} C_{N-1}^{+(i-j)}(m) + \sum_{j=2}^{n_-} C_{N-1}^{-(i+j)}(m) = 0 \quad (2.4)$$

を満たさなければならない。



1 図



2 図

式(2.2)の漸化式は連続化($m \rightarrow x = ma$, $i \rightarrow l = ib$, $N \rightarrow t = Nt_0$; a, b, t_0 ; 単位量)によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & -\frac{a}{t_0} \frac{\partial}{\partial x} (p^+ - p^-) w + \frac{a^2}{2t_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p^+ + p^-) w \\ & -\frac{b}{t_0} \frac{\partial}{\partial l} (\tilde{r}^+ - \tilde{r}^-) w + \frac{b^2}{2t_0} \frac{\partial^2}{\partial l^2} (\tilde{r}^+ + \tilde{r}^-) w \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。小文字の関数は、離散値をとる大文字の関数に対応する連続関数である。(2.3)と(2.4)は

$$\begin{aligned} \tilde{r}^\pm(x, l \pm b, t - t_0) = & r^\pm + \frac{\kappa}{w(x, l \pm b, t - t_0)} \frac{1}{b} \\ & \cdot \int_{L^\pm} c^\pm(x, l', t - t_0) dl' \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{t_0} \left(\int_{L^+} c^+(x, l', t) dl' + \int_{L^-} c^-(x, l', t) dl' \right) = 0 \quad (2.7)$$

となる。ただし

$$L^+ \in [\ell^-, \ell], \quad L^- \in [\ell, \ell^+], \quad \ell^\pm = \left(\frac{M_2}{M_1} \right) b, \quad c^\pm(x, \ell) = 0, \quad \ell < 0$$

である。

3. 定常状態のサイズ分布

式(2.1)で説明した $\tilde{n}$ のモデルとして(2.5)～(2.7)で記述される w を使い、その定常状態のサイズ分布

$$w(\ell) (= \int w(x, \ell) dx)$$

を調べる。議論を簡単にするため

$$\begin{aligned} \frac{a}{t_0} \Delta p \frac{\partial w}{\partial x} &\gg \frac{a^2}{t_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Delta p = p^+ - p^- \\ \frac{b}{t_0} \Delta r \frac{\partial w}{\partial \ell} &\gg \frac{b^2}{t_0} \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\frac{\partial w}{\partial \ell} \right), \quad \Delta r = r^+ - r^- \end{aligned} \quad (3.1)$$

と制限する。図2に示す断面積 S を通過する正味の体積流 (volume flow) Q を導入すると、ガウスの発散定理から(2.5)は

$$\frac{\partial w(\ell)}{\partial \ell} + \frac{1}{G\tau} w(\ell) - \frac{\kappa}{G t_0} c^-(\ell) = 0 \quad (3.2)$$

$$(G = b \Delta r / t_0, \quad \tau = v_1 / Q)$$

となる。

$$c^-(\ell) = \int c^-(x, \ell) dx$$

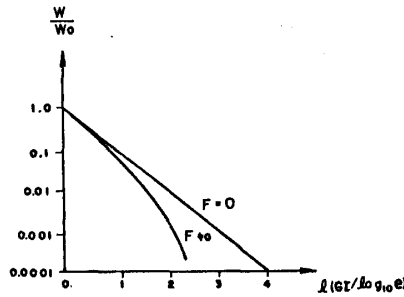
τ の大きさは $v_1 \sim t_0 / \Delta p$ である。導出の際 $\ell^- = 0$ 、 ℓ^+ は十分大として c^+ と c^- の関係は、長さの変化 $\ell \rightarrow \ell + \Delta \ell$ に対する(2.7)からの条件、 $c^+ - c^- = 0$ を使った。(3.2)の解は、胚種の分布を $w(\ell = 0) = w_0$ とすると

$$w(\ell) = w_0 \exp\left(-\frac{\ell}{G\tau}\right) \left[1 + \kappa \frac{F(\ell)}{w_0 G t_0} \right] \quad (3.3)$$

$$F(\ell) = \int_0^\ell e^{\ell'/G\tau} c^-(\ell') d\ell' \quad (3.4)$$

となる。(3.3)の様子は図3に示す。サイズ分布は $k(<0)$ によって ℓ の小さい方にずれて

いる。従って $k > 0$ では逆の効果が予想される。



3 図 $\log w/w_0 = -\frac{l}{G\tau} + \log [1 + k F/w_0 G t_0]$ の表式で,

$c^-(l) = 1 - e^{-\lambda l}$, $\lambda \ll 1$ として指数分布からのずれを示す。

4. ランダム・カッティングのモデル

$c^-(l)$ のモデルを考える前に, まず長さを表す確率変数を Y とし, 次式で定義される確率密度の極限を考える。

$$\lambda_\rho(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0+} \frac{p_r(l < Y < l + \Delta l \mid l < Y)}{\Delta l} \quad (4.1)$$

これは, 長さ l の要素が, 更に Δl だけ成長したときに切断される確率密度を表す。ここでは特に添字 ρ をつけてプロセスの確率密度分布関数 $\rho(l)$ を示す。この $\rho(l)$ によって $c^-(l)$ は次式で定義される。

$$c^-(l) = \int_0^l \rho(l') dl' \quad (4.2)$$

(4.1) に

$$p_r(l < Y < l + \Delta l \mid l < Y) = \rho(l) dl, \quad p_r(l < Y) = 1 - c^-(l)$$

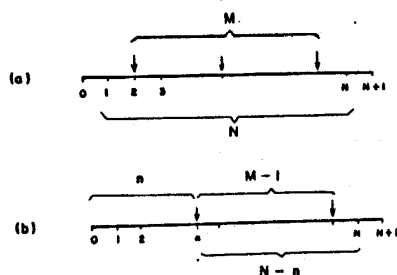
を代入して得られた微分方程式は初期条件 $c^-(l) = 0$ で解くと

$$\rho(l) = \lambda(l) \exp \left[-\int_0^l \lambda(l') dl' \right] \quad (4.3)$$

となる。 $\lambda(l)$ として, (i) 一定の割合で切れる場合, $\lambda(l) = \lambda_0$, (ii) l が長くなると切れやすくなる場合, $\alpha \lambda l^{\alpha-1} (\alpha > 1)$ に分類すると,

$$\rho(l) = \alpha \lambda l^{\alpha-1} \exp(-\alpha l^\alpha)$$

となる。結局 $c^-(l)$ は $1 - \exp(-\lambda l^\alpha)$ となる。



4図 記号↓は“切断”する結合点を示す。

特に (i) の $\rho(l)$ は、これを直接 N 本の結合点の鎖に M 本の切断を行う問題として導出可能である⁶⁾。即ち鎖に M 本の切断を行う場合、長さ n の区間の鎖を残して切断を行うと云う条件をつけた場合の数 (図4) ,

$$\rho(n) = \frac{\binom{N-n}{M-1}}{\binom{N}{M}}, \quad \sum_{n=1}^{N-(M-1)} \rho(n) = 1 \quad (4.4)$$

で $\rho(n)$ を定義した後,

$$N/M = Q \text{ (一定)}, \quad N, M \rightarrow \infty$$

の極限をとり、この式を更に $Qb = l_0$, $nb = l$ で連続化すると

$$\rho(l) = \frac{1}{l_0} \exp\left(-\frac{l}{l_0}\right) \quad (4.5)$$

となる。 l_0 は

$$\lambda_0 = \langle l \rangle = \int_0^\infty l \rho(l) dl$$

に等しい。

5. まとめ

系を構成する要素のサイズ分布から要素間のダイナミクスを調べる一つのモデルとして、Coupled Random Walks (CRW) にもとずき、形の変形を伴った確率過程を考えた。CRWの漸化式は(2.2), (2.3)で示した様に状態間をとび移る確率の与え方によって結果は変る。この点は未知のダイナミクスに対するこの定式化の利点の一つでもある。ここでは定常分布におけるサイズ分布は、簡単のため x と l に関する“拡散項”を無視して議論した。しかしこの項を考慮すれば、興味ある問題である金属粉粒子の2重モードのサイズ分布⁷⁾の議論が可能となる。⁸⁾

又, (2.5) を直接解くことで時間に依存するサイズ分布も調べることが出来る。このとき, § 4 の議論は当然のことながら拡張した

$$\lambda_p(l, t), \quad \rho(l, t)$$

で行わなければならない。最後に, もっといろいろな条件のもとで (4.4) と (4.5) で述べた $\rho(l)$ に相当する表式の評価を行い指数分布 (4.5) と異なる分布が得られている。⁶⁾

文 献

- 1) A. Randolph and M. A. Larson: *Theory of Particulate Processes, Analysis and Techniques of Continuous Crystallization* (Academic press. NY. 1971).
- 2) C. G. Granqvist and R. A. Buhrman: J. Appl. Phys. **47** (1976) 2200.
- 3) H. H. G. Jellinek and G. White: J. Poly. Sci. **6** (1951) 745.
O. Saito: J. Phys. Soc. Japan **13** (1958) 198.
R. M. Ziff: J. Stat. Phys. **23** (1980) 241.
- 4) H. Hara and S. Fujita: Z. Physik **B32** (1978) 99.
H. Hara: Z. Physik **B32** (1979) 405.
H. Hara and S. D. Choi: Z. Physik **B38**, (1980) 351.
- 5) H. Hara: 物性研究 **33** No. 5 (1980) E28.
- 6) B. L. Scipioni: (Thesis submitted to State University of New York at Buffalo, 1978).
B. L. Scipioni, A. Vilenkin, H. Hara and S. Fujita (unpublished).
- 7) R. Watanabe and Y. Masuda: Metal Sci. Eng. **30** (1977) 33; 日本金属学会誌 **45** (1981) 781.
- 8) H. Hara: (1982秋の物理学会).