物性研究 42－2（1984－5）

二種の異方性をもつ古典 Heisenberg Chain における Breather モード

愛知教育大　間々田　博　司

（1984年4月4日受理）

一次元磁性体のモデルとして，様々な議論がなされてきている Heisenberg chain は非線型系の主要なモデルとしてもまた，広く興味を持たれ，研究されてきている[1),2)]。

Heisenberg 系に対するある種の近似形とみなされる Sine-Gordon 系では kink 解とともに，breather 解が具体的に表現され，それらを含んだ統計力学が議論されている[3)]。二種の異方性をもつ Heisenberg 系においても，スピン波，kink と同様，breather が重要な意味を持っているらしいことが知られている[1),2)]。

ここでは，この系における breather 解の具体的な導出を議論し，あわせてその性質を考える。

§1　Breather とそのエネルギー

Etrich and Mikeska[1)] を参照して，次の Hamiltonian を考える。

$$H=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\left\{\left|\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial x}\right|^2+\lambda\,(S^z)^2-(S^x)^2+1\right\} \tag{1}$$

大きさ1の古典スピンを，

$$\boldsymbol{S}=(\cos\theta,\ \sin\theta\cos\phi,\ -\sin\theta\sin\phi) \tag{2}$$

で表現し，運動方程式を作ると，

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\sin\theta\cos\theta\left\{1+\lambda\sin^2\phi+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right\}+\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\theta\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\lambda\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}=0 \tag{4}$$

となる。この系のエネルギーは

HAMADA, Hiroshi

$$E = \frac{1}{2}\int \{ (\frac{\partial\theta}{\partial x})^2 + \sin^2\theta (\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 + \lambda \sin^2\theta \sin^2\phi + \sin^2\theta \} \mathrm{d}x \tag{5}$$

で与えられる。

(3)(4) の運動方程式から，$\phi = \phi_0$ (一定) とおくことにより，通常の kink 解が得られ

$$\tan\frac{\theta}{2} = C \exp \{ \pm (1 + \lambda \sin^2 \phi_0)^{1/2} x - \lambda t \sin\phi_0 \cos\phi_0 \} \tag{6}$$

そのエネルギーは

$$E_{\mathrm{kink}} = 2 (1 + \lambda \sin^2 \phi_0)^{1/2} \tag{7}$$

で与えられることは広く知られ，様々な議論がなされている。

$\phi = \phi_0$ の条件をゆるめ，$\phi = \phi(t)$; 時間のみの関数，を仮定する。(3)(4) は，より簡単に，

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= \cos\theta (1 + \lambda \sin^2\phi) - \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \\ \lambda \sin\phi \cos\phi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

となる。ここで sine-Gordon 系の breather 解を参考にして，(8) の解として，

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{f(t)}{\mathrm{ch}^2 Bx} \tag{9}$$

とおいてみる。ここで B は傾きをあらわす定数で，$f(t)$ は時間のみに依存する正値の関数としておく。(9) を微分することにより，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[\ln(\tan^2\frac{\theta}{2})] = -B\,\mathrm{th}\,Bx \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= \cos\theta \, [\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}]^2 - B^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^2 Bx} \\ &= B^2 \cos\theta - B^2 \frac{1 + \cos\theta}{\mathrm{ch}^2 Bx} \\ &= B^2 \cos\theta \{ 1 + 1/f \} - B^2/f \end{aligned} \tag{11}$$

(11) は(10)および(9)を用いて変形されている。

同様に

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{2f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

(11)(12)を(8)と比較するならば,

$$\text{(i)}\quad B^2\left(1+\frac{1}{f}\right)=1+\lambda\ \sin^2\phi$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{B^2}{f},\qquad \text{(iii)}\quad \frac{1}{f}\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=-2\lambda\sin\phi\cos\phi \tag{13}$$

の3式が成立するならば,(9)が(8)の解となることがわかる。(13)の(i)を微分し,(ii)を用いると自動的に(iii)が導かれるから,独立な条件は二つで充分であり,次のように書いても良い。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}&=1+\lambda\ \sin^2\phi-B^2\\ f&=B^2\left\{1+\lambda\sin^2\phi-B^2\right\}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(14)は容易に積分出来て,Bの値に応じて,二種の解があることがわかる。適当な定数α,ϕ_0を定義すると,得られる解は以下のようにまとめられる。

1) $B^2\equiv 1-\lambda\,\mathrm{sh}^2\alpha<1$のとき

$$\begin{aligned}\tan^2\frac{\theta}{2}&=\frac{\cos^2(\omega t+\gamma)+\mathrm{sh}^2\alpha}{\lambda\,\mathrm{sh}^2\alpha\,\mathrm{ch}^2\alpha}\quad\frac{B^2}{\mathrm{ch}^2 Bx}\\ \tan\phi&=\mathrm{th}\,\alpha\ \tan(\omega t+\gamma)\end{aligned} \tag{15}$$

ここでωは

$$\omega^2\equiv(1-B^2)(1+\lambda-B^2)=\lambda^2\ \mathrm{sh}^2\alpha\ \mathrm{ch}^2\alpha$$

で定義される角振動数で,γは任意の定数である。

2) $1<B^2\equiv 1+\lambda\ \sin^2\phi_0<1+\lambda$ のとき,

$$\begin{aligned}\tan^2\frac{\theta}{2}&=\frac{\mathrm{sh}^2(\omega t+\gamma)+\sin^2\phi_0}{\lambda\sin^2\phi_0\cos^2\phi_0}\ \frac{B^2}{\mathrm{ch}^2 Bx}\\ \tan\phi&=-\tan\phi_0\ \coth(\bar{\omega}t+\gamma)\\ \bar{\omega}^2&\equiv(B^2-1)(1+\lambda-B^2)=\lambda^2\sin^2\phi_0\cos^2\phi_0\end{aligned} \tag{16}$$

となる。1)は breather に対応する解であり,2)は kink, anti-kink の散乱を表わす解である。今の場合,$B^2>1+\lambda$ では解は存在しない。

全く平行した議論により

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{f(t)}{\mathrm{sh}^2 Bx} \tag{17}$$

の型で表現される解があることが確められる。ここから，さらに二種類の解が，以下のように表現される。ϕ_0, β, γ を適当な定数として，

3)　$1<B^2\equiv 1+\lambda\sin^2\phi_0<1+\lambda$ のとき，

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{sh}^2(\bar{\omega}t+\gamma)+\cos^2\phi_0}{\lambda\sin^2\phi_0\cos^2\phi_0}\,\frac{B^2}{\mathrm{sh}^2 Bx}$$

$$\tan\phi=\tan\phi_0\,\mathrm{th}(\bar{\omega}t+\gamma) \tag{18}$$

$$\bar{\omega}^2\equiv(B^2-1)(1+\lambda-B^2)=\lambda^2\sin^2\phi_0\cos^2\phi_0$$

4)　$B^2\equiv 1+\lambda\,\mathrm{ch}^2\beta>1+\lambda$ のとき，

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{sh}^2(\omega t+\gamma)+\mathrm{sh}^2\beta}{\lambda\,\mathrm{sh}^2\beta\,\mathrm{ch}^2\beta}\,\frac{B^2}{\mathrm{sh}^2 Bx}$$

$$\tan\phi=\coth\beta\,\tan(\omega t+\gamma) \tag{19}$$

$$\omega^2\equiv(B^2-1)(B^2-1-\lambda)=\lambda^2\,\mathrm{sh}^2\beta\,\mathrm{ch}^2\beta$$

のように与えられる。また，$B^2<1$ の時には解は存在しない。3)は散乱状態，4)は 1)と同様 breather と考えられる。2)，3)が kink, anti-kink の衝突を表わしていることは，傾きの定数 B の定義に注目し，$t\to\mp\infty$ での様子を調べれば自明のことである。

ここで与えられた解に対するエネルギーを計算する。仮定された解(9)を(5)に代入し，(10)(13)を考慮すると，

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2\theta\,\{B^2\mathrm{th}^2 Bx+(1+\lambda\sin^2\phi)\}\,\mathrm{d}x\\&=2B^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\mathrm{sh}^2 Bx+\mathrm{ch}^2 Bx)+\mathrm{ch}^2 Bx}{(\mathrm{ch}^2 Bx+f)^2}\,\mathrm{d}x\\&=2B\,\frac{\mathrm{sh}Bx\ \mathrm{ch}Bx}{\mathrm{ch}Bx+f}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=4B\end{aligned} \tag{20}$$

を得ることが出来る。解(17)についても同様な計算を行うことにより，(20)と全く同じ表現で，そのエネルギーを書くことができる。

エネルギーは時間によらず，またパラメータλの値を陽に含まず，傾きの定数Bだけで決定されている。kink (または anti-kink) が存在しうるBの範囲では kink のエネルギーの2倍となる。我々の場合は breather は2種あり，そのエネルギーは，0～4および$4(1+\lambda)^{1/2}$～∞ の範囲となり，breatherのエネルギースペクトルには$\Delta E=4\,[(1+\lambda)^{1/2}-1]$のギャップが存在することになる。

§2　容易軸，容易面および sine-Gordon 極限について

前節で得られた解は$\lambda>0$と考えて整理してきたが，この制限はとり去っても良い。以下，二三の簡単な場合を考察する。

I．$\lambda=0$　容易軸の場合

kink 解は　$\tan(\theta/2)=\exp\{\pm(x-x_0)\}$

となり傾き1の静止解のみがゆるされる。また breather に対応する解は

$$S_x=\cos\theta=\begin{cases}\dfrac{(1-B^2)\,\mathrm{ch}^2 Bx-B^2}{(1-B^2)\,\mathrm{ch}^2 Bx+B^2}\,, & 0<B^2<1\\[2ex] \dfrac{(B^2-1)\,\mathrm{sh}^2 Bx-B^2}{(B^2-1)\,\mathrm{sh}^2 Bx+B^2}\,, & B^2>0\end{cases}$$

$$\phi=(1-B^2)\,t+\gamma$$

で与えられ，スピンの容易軸成分は時間的には変化しない。静止kinkは衝突を起さない。

II．$\lambda=-1$；容易面の場合

kink 解は

$$\tan\frac{\theta}{2}=C\exp\{\pm|\cos\phi_0|\,x+\sin\phi_0\,\cos\phi_0\cdot t\}$$

で与えられ，傾きの定数は$0\leq B=|\cos\phi_0|\leq 1$である。

breather 解は$B^2>1$でのみ存在し

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{B^2-\sin^2(B\sqrt{B^2-1}\cdot t+\gamma)}{(B^2-1)\,\mathrm{sh}^2 Bx}$$

$$\tan\phi=-\frac{\sqrt{B^2-1}}{B}\tan(B\sqrt{B^2-1}\cdot t+\gamma)$$

となり，散乱解は$0\leq B\leq 1$の場合のみ存在して，

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{B^2+\mathrm{sh}^2(B\sqrt{1-B^2}\cdot t+\gamma)}{(1-B^2)\,\mathrm{ch}^2 Bx}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{1-B^2}}{B}\,\mathrm{th}\,(B\sqrt{1-B^2}\cdot t+\gamma)$$

で与えられる。

Ⅲ. $\lambda \to +\infty$; sine-Gordon 極限

基本的なスピンの運動は $x-y$ 面内で起り θ に対する運動方程式は sine-Gordon の方程式で近似出来ることが知られている。このとき (15) (16) (18) が解となり，B^2 が有限であるために，$\mathrm{sh}^2\alpha$，$\sin^2\phi_0$ が $(\lambda)^{-1}$ 程度とならねばならないことを考慮すると，$0 \leq B < 1$ のときのみ breather が存在し

$$\tan^2\frac{\theta}{2} \simeq \frac{B^2\cos^2(\omega t+\gamma)}{(1-B^2)\,\mathrm{ch}^2 Bx}$$

$$\tan\phi \simeq \frac{\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{\lambda}}\,\tan(\omega t+\gamma)$$

$$\omega^2 \simeq \lambda\,(1-B^2)$$

となる。また散乱解は $B^2>1$ の場合で，二種存在する。

$$\begin{cases} \tan^2\dfrac{\theta}{2} \simeq \dfrac{B^2\mathrm{sh}^2(\overline{\omega}\,t+\gamma)}{(B^2-1)\,\mathrm{ch}^2 Bx} \\[2ex] \tan\phi \simeq -\dfrac{\sqrt{B^2-1}}{\sqrt{\lambda}}\,\coth(\overline{\omega}\,t+\gamma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan^2\dfrac{\theta}{2} \simeq \dfrac{B^2\mathrm{ch}^2(\overline{\omega}\,t+\gamma)}{(B^2-1)\,\mathrm{sh}^2 Bx} \\[2ex] \tan\phi \simeq \dfrac{\sqrt{B^2-1}}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\,(\overline{\omega}\,t+\gamma) \end{cases}$$

$$\overline{\omega}^2 \simeq \lambda\,(B^2-1)$$

これらの解の時間スケールを $\sqrt{\lambda}\;t \to t$ のように変えるならばsine-Gordon方程式の解と完全に一致することがわかる。

◦ まとめ

二種の異方性をもつ Heisenberg chain を扱い非線型励起として，kink および breather を運動方程式から導いた。この系の breather モードは sine-Gordon 系の場合に比して，多少複雑なものとなる。傾きを表わす定数 B に注目すると，単一の kink としては存在しない B の値に対して，breather が出現し，kink になり得る B に対しては散乱状態として，kink の独立性が認められる。

エネルギーの面で考えると，容易面型の Heisenberg chain では kink が，より低いエネルギーを持つ非線型励起となる。一方，容易軸型のモデル (sine-Gordon 極限もふくめて) では，breather が，より低い励起エネルギーを持つ非線型励起であることがわかる。したがって，このような系の統計力学を，kink, breather の集団として扱う場合，この点に留意する必要があると思われる。

この系において，ここでの方法と平行した議論により，Jacobi の楕円関数で表現される定在波型の一群の厳密解が存在することが示される。その解は $k \to 0$ の極限として自然に magnon (phonon) を含み，$k \to 1$ の極限で本稿の breather 型の解となるものである。θ について線型化した運動方程式からの解と対応させるならば，その振巾が k と対応することから，振巾の大きい magnon が自然に breather に関連づけられることがわかる。これについては稿を改めて議論する。

References

1) C. Etrich and H. J. Mikeska, J. Phys. **C16** (1983) 4889.
2) K. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 1518.
3) K. Maki and H. Takayama, Phys. Rev. **B20** (1979) 5002.