参 考 文 献

1) K. Kawasaki and T. Ohta, Physica **116A**, (1982) 573.
2) J.T. Waldram, A. B. Pippard, and J. Clarke, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **268**, (1970) 265.
3) E. Helfand and Y. Tagami, J. Chem. Phys. **56**, (1972) 3592.
4) Suggested by Professor R. Hirota.
5) Y. Tagami, J. Math. Phys. to appear.

Superspace Formulation of Classical Spectral Transformation Method for the Massive Thirring Model

筑波大・物理　表　実, 井上和彦

この報告では Massive Thirring Model を量子逆散乱法 (又は Quantum Spectral Transformation Method) で議論するための準備としてこのモデルの古典逆散乱問題 (又は Classical Spectral Transformation Method) を調べる。 Fermion field を古典論で議論するにはその場は

Grassman-valued field $(\psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0,\ \psi_i^2(x) = 0)$

として取り扱う必要がある。このため以下の議論は Fermion field を含む系の古典逆散乱問題の formulation としても興味深いと思われる。

散乱問題を議論するために２成分からなる Super field $\Phi(x, t, \theta)$ を導入する。ここで θ は Grassman number ($\theta^2 = 0$) である。この field についての Lax pair を次式で与える。

$$i\,\partial_x \Phi(x, t, \theta) = L\Phi(x, t, \theta), \tag{1}$$

$$i\,\partial_t \Phi(x, t, \theta) = M\Phi(x, t, \theta), \tag{2}$$

上式で L, M は Superspace での operator であり，２行２列の行列 L_i, M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) をつかって次のように表わされる。

$$L = L_1 + L_2\,\partial_\theta + \theta L_3 + \theta L_4\,\partial_\theta\,, \tag{3}$$

$$M=M_1+M_2\,\partial_\theta+\theta M_3+\theta M_4\,\partial_\theta\,. \tag{4}$$

L，M を Grassman 代数の even element としたとき，定義から明らかなように L_1，L_4，M_1，M_4 は even element L_2，L_3，M_2，M_3 は odd element である。 Operators L，M の積は次式

$$\begin{aligned}LM=&(L_1M_1+L_2M_3)+(L_1M_2+L_2M_1+L_2M_4)\,\partial_\theta\\&+\theta(L_1M_3+L_3M_1+L_4M_3)\\&+\theta(L_1M_4-L_2M_3+L_3M_2+L_4M_1+L_4M_4)\,\partial_\theta\,,\end{aligned} \tag{5}$$

で与えられることをつかって (1) と (2) の compartibility condition

$$\mathrm{i}\,\partial_t L-\mathrm{i}\,\partial_x M+LM-ML=0\,, \tag{6}$$

は次の 4 式に帰着する。

$$\mathrm{i}\,\partial_t L_1-\mathrm{i}\,\partial_x M_1+[L_1,M_1]+L_2M_3-M_2L_3=0\,, \tag{7}$$

$$\mathrm{i}\,\partial_t L_2-\mathrm{i}\,\partial_x M_2+L_1M_2-M_1L_2+L_2(M_1+M_4)-M_2(L_1+L_4)=0\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{i}\,\partial_t L_3-\mathrm{i}\,\partial_x M_3+L_3M_1-M_3L_1+(L_1+L_4)M_3-(M_1+M_4)L_3=0\,, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\,\partial_t(L_1+L_4)-\mathrm{i}\,\partial_x(M_1+M_4)+L_3M_2-M_3L_2\\&\quad+[L_1+L_4,M_1+M_4]=0\,.\end{aligned} \tag{10}$$

$T(x,x_0)$ を次の関係をみたす operator とする。

$$\mathrm{i}\,\partial_t T(x,x_0)=LT(x,x_0)\,, \tag{11}$$

$$T(x_0,x_0)=I\,. \tag{12}$$

このとき Transfer operator T を

$$T=T(l,-l)=T_1+T_2\,\partial_\theta+\theta T_3+\theta T_4\,\partial_\theta\,, \tag{13}$$

で定義する。

上の議論を次の Lagrangian $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi-\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi, \tag{14}$$

で与えられる Massive Thirring Model に応用してみよう。この model では L_i, M_i は次のようになる。

$$L_1=g\begin{bmatrix}\bar{\psi}\gamma_1\psi & 0\\ 0 & -\bar{\psi}\gamma_1\psi\end{bmatrix},\quad L_2=\sqrt{\frac{mg}{2}}\begin{bmatrix}-\chi_+^*, & \chi_-^*\\ \chi_- & \chi_+\end{bmatrix},$$

$$L_3=\sqrt{\frac{mg}{2}}\begin{bmatrix}\chi_+, & -\chi_-^*\\ \chi_- & \chi_+^*\end{bmatrix},\quad L_4=-\{g\bar{\psi}\gamma_1\psi+\frac{m}{2}(\lambda^2-\frac{1}{\lambda^2})\}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$M_1=g\begin{bmatrix}-\bar{\psi}\gamma_0\psi, & 0\\ 0 & \bar{\psi}\gamma_0\psi\end{bmatrix},\quad M_2=\sqrt{\frac{mg}{2}}\begin{bmatrix}\chi_-^*, & -\chi_+^*\\ -\chi_+, & -\chi_-\end{bmatrix},$$

$$M_3=\sqrt{\frac{mg}{2}}\begin{bmatrix}-\chi_-, & \chi_+^*\\ -\chi_+, & -\chi_-^*\end{bmatrix},\quad M_4=\{g\bar{\psi}\gamma_0\psi+\frac{m}{2}(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2})\}\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{bmatrix}. \tag{16}$$

ここで $\chi_\pm$, $\chi_\pm^*$ はそれぞれ

$$\chi_\pm=\lambda\psi_1\pm\frac{1}{\lambda}\psi_2,\quad \chi_\pm^*=\lambda\psi_\pm^*\pm\frac{1}{\lambda}\psi_2^*, \tag{17}$$

で定義されている。又 ψ と ψ^* の Poisson bracket

$$\{\psi_i,\psi_j\}=0,\quad \{\psi_i^*,\psi_j^*\}=0,\quad \{\psi_i^*(x),\psi_j(y)\}=i\delta(x-y) \tag{18}$$

を使って L operator の element 間の poisson bracket は

$$\begin{aligned}\{L(x,\lambda)\overset{\otimes}{,}L(y,\mu)\}=&-i[\gamma(\lambda,\mu),L(x,\lambda)\otimes I\\ &+I\otimes L(y,\mu)]\delta(x-y),\end{aligned} \tag{19}$$

となることが示される。ここで superspace の operator L，L' の直積 $L\otimes L'$ は Grassman number　θ，θ' をつかって

$$L(\theta)\otimes L'(\theta')=(L_1\otimes L_1')+(L_2\otimes L_1')\partial_\theta+(L_1\otimes L_2')\partial_{\theta'}$$
$$+\theta(L_3\otimes L_1')+\theta'(L_1\otimes L_3')+\theta(L_4\otimes L_1')\partial_\theta$$
$$+\theta(L_3\otimes L_2')\partial_{\theta'}-\theta'(L_2\otimes L_3')\partial_\theta+\theta'(L_1\otimes L_4')\partial_{\theta'}$$
$$-(L_2\otimes L_2')\partial_\theta\partial_{\theta'}-\theta\theta'(L_3\otimes L_3')+\theta\theta'(L_4\otimes L_3')\partial_\theta$$
$$-\theta\theta'(L_3\otimes L_4')\partial_{\theta'}-\theta(L_4\otimes L_2')\partial_\theta\partial_{\theta'}$$
$$+\theta'(L_2\otimes L_4')\partial_\theta\partial_{\theta'}-\theta\theta'(L_4\otimes L_4')\partial_\theta\partial_{\theta'},\qquad(20)$$

と定義される。又(19)の左辺の表式は $L(x,\lambda)$ と $L(y,\mu)$ の直積の element を $L(x,\lambda)$ と $L(y,\mu)$ の element の積のかわりにそれらの poisson bracket でおきかえたものである。更に $r(\lambda,\mu)$ は直積 superspace の operator で４行４列の行列 $r_i(i=1,\cdots,6)$ を使って次のように表わされる。

$$r(\lambda,\mu)=r_1(\lambda,\mu)-\theta r_1(\lambda,\mu)\partial_\theta+\theta r_2(\lambda,\mu)\partial_{\theta'}$$
$$+\theta' r_3(\lambda,\mu)\partial_\theta-\theta' r_1(\lambda,\mu)\partial_{\theta'}+\theta\theta' r_4(\lambda,\mu)$$
$$+r_5(\lambda,\mu)\partial_\theta\partial_{\theta'}+\theta\theta' r_6(\lambda,\mu)\partial_\theta\partial_{\theta'},\qquad(21)$$

但し，

$$r_1=\frac{g}{\mathrm{sh}\,2\nu}\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\,2\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{ch}\,2\nu & 2 & 0\\ 0 & 2 & -\mathrm{ch}\,2\nu & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{ch}\,2\nu\end{bmatrix},$$

$$r_2=\frac{g}{\mathrm{sh}\,2\nu}\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\,\nu & -\mathrm{sh}\,\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\nu & \mathrm{sh}\,\nu\\ -\mathrm{sh}\,\nu & \mathrm{ch}\,\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{sh}\,\nu & \mathrm{ch}\,\nu\end{bmatrix},$$

$$r_3=\frac{g}{\mathrm{sh}\,2\nu}\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\,\nu & 0 & \mathrm{sh}\,\nu & 0\\ \mathrm{sh}\,\nu & 0 & \mathrm{ch}\,\nu & 0\\ 0 & \mathrm{ch}\,\nu & 0 & -\mathrm{sh}\,\nu\\ 0 & -\mathrm{sh}\,\nu & 0 & \mathrm{ch}\,\nu\end{bmatrix},$$

$$r_4=\frac{g}{\mathrm{sh}\,2\nu}\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{sh}\,\nu & -\mathrm{sh}\,\nu & 0\\ 0 & \mathrm{ch}\,\nu & -\mathrm{ch}\,\nu & 0\\ 0 & \mathrm{ch}\,\nu & -\mathrm{ch}\,\nu & 0\\ 0 & -\mathrm{sh}\,\nu & -\mathrm{sh}\,\nu & 0\end{bmatrix},$$

$$r_5=\frac{g}{\mathrm{sh}\,2\nu}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{sh}\,\nu & \mathrm{ch}\,\nu & \mathrm{ch}\,\nu & \mathrm{sh}\,\nu\\ \mathrm{sh}\,\nu & -\mathrm{ch}\,\nu & -\mathrm{ch}\,\nu & \mathrm{sh}\,\nu\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$r_6=-r_1+\frac{g}{\mathrm{sh}\,2\nu}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。\tag{22}$$

(22) で $\nu=\log\dfrac{\lambda}{\mu}$ 。

Transfer operator T の element の poisson bracket は

$$\{T(\lambda)\overset{\otimes}{,}\ T(\mu)\}=[r(\lambda,\mu),\ T(\lambda)\otimes T(\mu)]\tag{23}$$

で与えられる。Massive Thirring Model の正準理論で力学変数を ψ, ψ^* から T operator の element (散乱 parameter) に変換したとき，散乱 parameter 間の Poisson bracket は(23)式から求められる。ここでは具体的な表式を書き下すかわりに (23)の結果をつかって保存量の議論に移ろう。

T は L operator を使って次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}T&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L(0)l}\,U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}L(0)l}\\ &=U_1+U_2\,\mathrm{e}^{i/2\cdot m(\lambda^2-1/\lambda^2)la_3}\,\partial_\theta+\theta\,\mathrm{e}^{i/2\cdot m(\lambda^2-1/\lambda^2)la_3}\,U_3\end{aligned}$$

$$+\theta\{-U_1+e^{i/2\cdot m(\lambda^2-1/\lambda^2)la_3}(U_1+U_4)e^{i/2\cdot m(\lambda^2-1/\lambda^2)la_3}\}\partial_\theta, \tag{24}$$

ここで U parametor は

$$U=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_{-l}^{l}dy_1\cdots dy_n\,\theta(y_1-y_2)\cdots\theta(y_{n-1}-y_n)$$

$$\times\widetilde{L}(y_1,\lambda)\widetilde{L}(y_2,\lambda)\cdots\widetilde{L}(y_n,\lambda), \tag{25}$$

で定義されている。但し

$$\widetilde{L}_1=L_1,\ \widetilde{L}_2=L_2\,e^{i/2\cdot m(\lambda^2-1/\lambda^2)ya_3},$$

$$\widetilde{L}_3=e^{-i/2\cdot m(\lambda^2-1/\lambda^2)ya_3}L_3,\quad \widetilde{L}_4=-L_1$$

又 $L(0)$ は (15) で $\psi=0$，$\psi^*=0$ とおいたものである。

一次元空間の大きさ l が無限大の極限で意味をもつ U operator に注目して，U_1+U_4 の (1, 1) 成分間の poisson bracket は消えることがわかる。従って，$\lambda^2\to 0$ 及び $\lambda^2\to\infty$ で $(U_1+U_4)_{11}$ を λ^2 及び $1/\lambda^2$ の巾に展開したときの係数 $\overset{(i)}{c}_\infty$，$\overset{(i)}{c}_0$

$$\log(U_1+U_4)_{11}=\frac{\overset{(1)}{c}_\infty}{\lambda^2}+\frac{\overset{(2)}{c}_\infty}{\lambda^6}+\cdots,\quad \lambda^2\to\infty,$$

$$\log(U_1+U_4)_{11}=\lambda^2\,\overset{(1)}{c}_0+\lambda^6\,\overset{(2)}{c}_0+\cdots,\quad \lambda^2\to 0, \tag{26}$$

間の poisson bracket は消える。 この係数の一次結合で Hamiltonian が与えられることからこれらの係数から保存量の系列が得られることがわかる。最後にいくつかの保存量の例を下に記す。

$$P=-\frac{m\,i}{4g}(\overset{(1)}{c}_\infty+\overset{(1)}{c}_0)=-i\int dy(\psi_1^*\psi_1'+\psi_2^*\psi_2'),$$

$$H=-\frac{m\,i}{4g}(\overset{(1)}{c}_\infty-\overset{(1)}{c}_0)$$

$$=\int dy\{-i(\psi_1^*\psi_1'-\psi_2^*\psi_2')+m(\psi_1^*\psi_2+\psi_2^*\psi_1)$$

$$+2g\,\psi_1^*\psi_1\psi_2^*\psi_2\},$$

$$Q=\frac{m^3\,\mathrm{i}}{16\,g}\left(\overset{(2)}{c}_{\infty}+\overset{(2)}{c}_{0}-\frac{12\,\mathrm{i}}{m}\,g\,P\right)$$

$$=\int \mathrm{d}y\,\{\,\mathrm{i}\,(\psi_1^{*\prime\prime\prime}\,\psi_1+\psi_2^{*\prime\prime\prime}\,\psi_2)+4\,g\,(\psi_1'\,\psi_1\,\psi_1^{*\prime}\,\psi_1^{*}-\psi_2'\,\psi_2\,\psi_2^{*\prime}\,\psi_2)$$

$$+\,g\,j_1\,(\psi_1^{*\prime}\,\psi_1'+\psi_2^{*\prime}\,\psi_2'-\psi_1^{*\prime\prime}\,\psi_1-\psi_2^{*\prime\prime}\,\psi_2-\psi_1^{*}\,\psi_1''-\psi_2^{*}\,\psi_2'')$$

$$+\,3\,\mathrm{i}\,m\,g\,(\psi_1^{*}\,\psi_1^{*\prime}-\psi_2^{*}\,\psi_2^{*\prime})\,\psi_1\,\psi_2-3\,\mathrm{i}\,m\,g\,\psi_1^{*}\,\psi_2^{*}\,(\psi_1\,\psi_1'-\psi_2\,\psi_2')\}\ ,$$

$$R=\frac{m^3\,\mathrm{i}}{16\,g}\left(\overset{(2)}{c}_{\infty}-\overset{(2)}{c}_{0}-\frac{4\,\mathrm{i}\,g}{m}\,H\right)$$

$$=\int \mathrm{d}y\,\{\,\mathrm{i}\,(\psi_1^{*\prime\prime\prime}\,\psi_1-\psi_2^{*\prime\prime\prime}\,\psi_2)+m\,(\psi_1^{*\prime\prime}\,\psi_2+\psi_2^{*\prime\prime}\,\psi_1)$$

$$+\,4\,m^2\,g\,\psi_1^{*}\,\psi_2^{*}\,\psi_1\,\psi_2+g\,j_1\,(\psi_1^{*\prime}\,\psi_1'-\psi_2^{*\prime}\,\psi_2'-\psi_1^{*\prime\prime}\,\psi_1$$

$$+\,\psi_2^{*\prime\prime}\,\psi_2-\psi_1^{*}\,\psi_1''+\psi_2^{*}\,\psi_2'')+2\,\mathrm{i}\,m\,g\,(\psi_1^{*}\,\psi_1^{*\prime}+\psi_2^{*}\,\psi_2^{*\prime})\,\psi_1\,\psi_2$$

$$-\,2\,\mathrm{i}\,m\,g\,\psi_1^{*}\,\psi_2^{*}\,(\psi_1\,\psi_1'+\psi_2\,\psi_2')$$

$$+\,4\,g\,(\psi_1'\,\psi_1\,\psi_1^{*\prime}\,\psi_1^{*}+\psi_2'\,\psi_2\,\psi_2^{*\prime}\,\psi_2^{*})\}\,,$$

ここで

$$j_1=\psi_1^{*}\,\psi_1-\psi_2^{*}\,\psi_2$$

であり，場の空間微分を ψ' 等で表わしてある。これらのうち最初の２つは運動量とエネルギーであり良く知られたものであるが次のより複雑な表式で与えられる２つの保存量はこの方法ではじめて得られたものである。