

アトラクターとしてのソリトン

名大・理 野崎一洋, 戸次直明

1. はじめに

散逸と外力のある無限自由度の力学系の、長時間発展が、散逸に抗して生き延びた少数自由度の力学系で記述できる場合があるという考えが、最近のカオス、及び、自己秩序系の研究の発展とともに増々魅力的になってきたように思われる。生き残る自由度を見つけることは、一般には大変困難であるが、散逸と外力の加わったソリトン系においては、ソリトンがその有力な候補であろう。散逸と外力がない場合は、ソリトンとその他の分散波動（輻射と呼ぶことにする）は分離可能であるので、もし、外力と散逸が小さければ、それらの非線形基準モード間の相互作用はまだ小さく、ソリトン概念の有用性は保たれると予想される。従って、適当なエネルギー源によって、主として、ソリトンにエネルギーを供給し生き残させ、輻射は散逸によって減衰させるという考えが可能になる。ここでは、非線形シュレーディンガー・ソリトンが単純な又はカオス的なアトラクターとして散逸に抗して生き残ることを示す。

2. モデル方程式とその漸減方程式

外力と散逸の加わった非線形シュレーディンガー方程式

$$i q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = i r q_{xx} + i (\varepsilon_1 e^{i\omega t} + \varepsilon_2 e^{2i\omega t}), \quad (1)$$

をモデル方程式とする。ここで、

$$0 < r \ll 1, \quad |\varepsilon_1|, \quad |\varepsilon_2| \ll 1$$

とする。従って、「はじめに」で述べたように、散逸と外力はソリトンと輻射にほぼ独立に働き、 $\omega > 0$ ととると、輻射は外場と非共鳴で、散逸のため減衰してしまうが、正の固有振動をもつソリトンは共鳴的にエネルギーを受け取ることができ生き残ると期待される。また、ソリトンの運動量は一様な外場によっては回復しないため、その速度を0とする。このように、1-ソリトンを含む初期条件のもとでは、次のソリトンが生き延びると予想される。

$$q(x, t) = 2\eta \operatorname{sech}(2\eta x) e^{i(\psi - \pi/2)}, \quad (2)$$

$$\psi_t = 4 \eta^2. \quad (3)$$

(2) を (1) 式より得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int |q|^2 dx &= (\varepsilon_1 e^{i\omega t} + \varepsilon_2 e^{2i\omega t}) \int q^* dx + c.c. \\ &\quad - 2r \int |q_x|^2 dx \end{aligned}$$

に代入すると,

$$\eta_t = -\frac{8}{3} r \eta^3 - \frac{\pi}{2} \{ \varepsilon_1 \sin(\omega t - \psi) + \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \psi) \}, \quad (4)$$

を得る。方程式 (3) と (4) を元の系 (1) の逡減方程式と呼ぶことにする。この逡減方程式は単純なアトラクターとカオス的なアトラクターをもつ。まず, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, r$ が十分小さい場合には次のような 2 つのアトラクターをもつ。

$$\eta \approx \eta_1 + \frac{\pi}{2} \varepsilon_2 \cos(\omega t + \chi_1),$$

$$\omega t - \psi \approx \chi_1 - 4\pi \varepsilon_2 \eta_1 \sin(\omega t + \chi_1),$$

又は,

$$\eta \approx \eta_2 - \frac{\pi}{2} \varepsilon_1 \cos(\omega t - \chi_2),$$

(5)

$$2\omega t - \psi \approx \chi_2 + 4\pi \varepsilon_1 \eta_2 \sin(\omega t - \chi_2),$$

ここで,

$$\eta_n = \sqrt{n\omega} / 2,$$

$$\sin \chi_n = -\frac{16r}{3\pi \varepsilon_n} \eta_n^3 \quad (n=1, 2).$$

但し, χ_n は安定な根をとる。これらのアトラクターの存在のための必要条件は,

$$|\varepsilon_n| > \frac{2r}{3\pi} (n\omega)^{3/2}, \quad |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| < \frac{\sqrt{\omega}}{\pi} (\sqrt{2} - 1).$$

後者の条件は, 2 つのアトラクターが独立に存在するために必要である。

$|\varepsilon_n|$ が増加すると、2つのアトラクター間の相互作用により、周期倍化の分岐が次々に起こり、単純なアトラクターから、カオス的なアトラクターに転化することが、逡減方程式により示せる。例えば、 $r = 0.05$, $\omega = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$ の場合、最初の周期倍化の分岐は $\varepsilon = 0.037$ で起こり、 $\varepsilon = 0.0401$ で(5)のアトラクターがカオス的なアトラクターに転化する。

図1は周期 2π 毎にプロットした、カオス的なアトラクターのポアンカレ断面である。

3. 数値実験

この節の目的は、非線形波動系(1)が、予想通り逡減方程式(3)と(4)で記述できることを数値実験によって確かめることと、初期条件に複数のソリトンを含む場合にどのようなアトラクターが存在するかを調べることである。そのため、一般にソリトンと輻射を含む次の初期条件をとる。

$$q(x, 0) = 2A\eta_0 \operatorname{sech}(2\eta_0 x)。$$

この波形に対する、散乱問題の固有値は厳密に求めることができるため、¹⁾ 初期のソリトンの個数、振幅が容易にわかる。 $1/2 < A < 3/2$, つまり、初期に1ソリトンと輻射が存在する場合の数値実験の結果は、逡減方程式が元の系(1)の長時間発展に対して良い近似を与えることが確かめられた。例えば、 $r = 0.05$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0405$, $\omega = 1$ の場合、逡減方程式は、

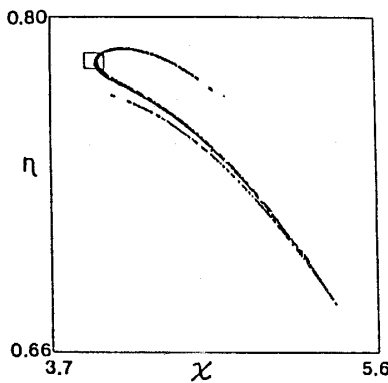


図1. 逡減方程式より求められたカオス的なアトラクターのポアンカレ断面 ($t = 2m\pi$, $m = 1, 2, \dots$)。但し $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0405$, $r = 0.05$, $\omega = 1$ 。

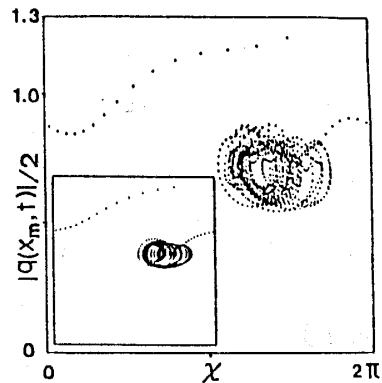


図2. 位相図 ($\chi, q(x_m, t)/2$) におけるカオス的なアトラクターの軌跡。但し、 $\chi \equiv 2\omega t - \arg\{q(x_m, t)\} - \pi/2$, $x_m(t)$ は $|q|$ が最大となる位置 x の値。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, r, \omega$ は図1と同じ値。初期条件は $A = 1, \eta_0 = 1.22$ 。

挿入図：同じパラメータ、初期条件のもとで得られた逡減方程式の解の軌跡。

$\eta = 1.22$, $\psi = \pi/2$ の初期ソリトンは, カオス的アトラクターとして生き残ることを予言している (図2の挿入図) が, 元の系の数値実験もこれを支持している (図2, 図3)。ポアンカレ断面の比較は図4に示されている。ずれの原因としては, 数値実験におけるソリトン・パラメータ (η と χ) の粗い決め方, 及び, 背景に残る小さいが有限の輻射の影響が考えられる。初期に存在する輻射は, 予想通り早い段階で分散し, 散逸することが図3よりわかる。

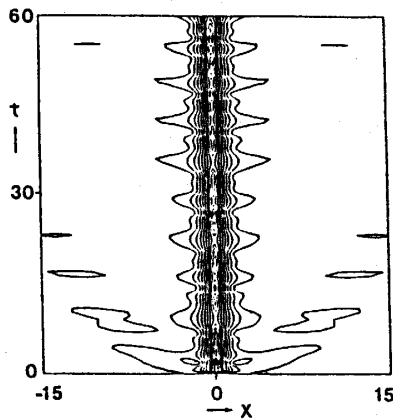


図3. 図1と同じパラメータで, 初期条件を $A = 1.2$, $\eta_0 = 0.871$ (初期固有値は図2と同じ) とした時の $|q(x, t)|$ の等高線。

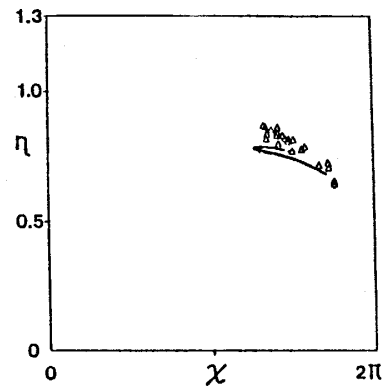


図4. 図2と同じ条件のもとでのポアンカレ断面の比較。実線: 逓減方程式の解。三角印: 元の方程式の解 ($0 \leq t \leq 160$)。

初期条件に複数のソリトンが含まれる場合 ($A > 3/2$) については, 1つの周波数成分をもつ外場 ($\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 \neq 0$) を与えて, 数値実験を行なった。その結果, 初期の2つの固有値が余り大きくない時, 次の2-ソリトン (2つのソリトンの結合状態) が新たなアトラクターとして生き残ることがわかった。

$$q(x, t) = \frac{e^{4i\eta_1^2 t + i\psi_2} \{ \eta_1 \cosh(2\eta_2 x) + e^{4i(\eta_2^2 - \eta_1^2)t + i\psi_2} \eta_2 \cosh(2\eta_1 x) \}}{a^2 \cosh 2(\eta_1 + \eta_2)x + \cosh 2(\eta_1 - \eta_2)x + b \cos \{ 4(\eta_2^2 - \eta_1^2)t + \psi_2 \}},$$

ここで,

$$a = (\eta_1 - \eta_2) / (\eta_1 + \eta_2),$$

$$b = 4\eta_1\eta_2 / (\eta_1 + \eta_2)^2, \quad \eta_1 > \eta_2.$$

共鳴と位相ロックの条件より,

$$\eta_1 = (\omega/2)^{1/2}, \quad \sin \psi_1 = \frac{2r}{3\pi} (2\omega)^{3/2}.$$

一方, η_2, ψ_2 は初期条件に依存する。この2-ソリトンの軌跡は, 位相面 $\{\chi(t), |q(0, t)|/2\}$ で, 中心 $(-\psi_1, \eta_1)$, 縦軸方向の半径 η_2 , 回転周期 $\pi/\{2(\eta_2^2 - \eta_1^2)\}$ をもつ楕円形を描く。但し

$$\chi(t) \equiv 2\omega t - \arg\{q(0, t)\} - \pi/2.$$

この2-ソリトンのアトラクターへの収束の典型的な様子は図5に示されている。 A が更になり初期の固有値が大きくなると, 2つのソリトンの結合は切れて, 2つの同一のソリトン(それらは, 漸減方程式の1-ソリトンのアトラクターに一致する)に分裂する(図6)。現在までの我々の数値実験の結果では, 3-ソリトン以上のアトラクターは存在しないようである。(3-ソリトンの結合状態が3つの1-ソリトン・アトラクターに分裂すること等は起こる。)

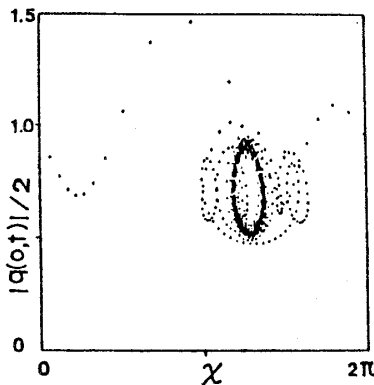


図5. 2つのソリトンの結合状態 ($\eta_1 = 0.71, \eta_2 = 0.2$) へ収束する軌跡 (位相面の定義は本文参照)。 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0.0405, r = 0.05, \omega = 1, A = 1.7, \eta_0 = 0.5167$ 。初期固有値は1.22と0.21。

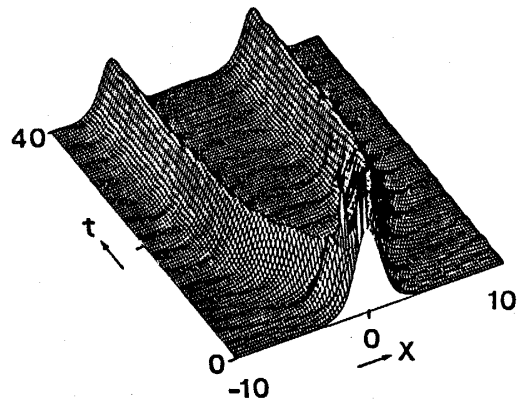


図6. 2つのソリトンの結合状態 ($A = 2, \eta_0 = 0.71$) の, 2つの同じソリトンへの分裂。但し, $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0.0405, \omega = 1, r = 0.05$ 。

4. まとめ

非線形シュレーディンガー方程式に, 小さな散逸と2つの周波数をもつ外場が加わると, 1-ソリトンを含む初期条件に対しては, 1-ソリトンが単純な又はカオス的なアトラクターとして生き残ることを示した。この場合, 系の長時間の振る舞いは, 1-ソリトンの1自由度系

吉田春夫

(2変数の通減方程式)で良く近似される。2-ソリトンを含む初期条件に、1つの周波数をもつ外場を加えると、2つのソリトンの結合状態が外場との共鳴によりアトラクターとして生き延びるか、又は、2つの同一のソリトン(1-ソリトンのアトラクター)に分裂する場合に分類されることがわかった。外場の周波数成分の数を増やすと、更に複雑な分岐が起こると予想されるが、その1つの極限の場合は、参考文献2)で議論した。

参考文献及び関連文献

- 1) J. Satsuma and N. Yajima, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 55, 284 (1974).
- 2) K. Nozaki and N. Bekki, Phys. Rev. Lett. **50**, 1226 (1983).
- 3) D. J. Kaup and A. C. Newell, Phys. Rev. **B18**, 5162 (1978).
- 4) K. Nozaki, Phys. Rev. Lett. **49**, 1883 (1982).
- 5) D. W. McLaughlin, J. V. Moloney and A. C. Newell, Phys. Rev. Lett. **51**, 75 (1983).

可積分力学系と非可積分力学系

東大・天文 吉田春夫

具体的に与えられた Hamilton 力学系の積分不可能性を証明することは一般に困難で、普遍的な判定条件は知られていない。本稿では解の多価性と積分不可能性を結びつけた Ziglin の定理を紹介し、その応用例として4次のポテンシャルを持つ力学系の積分不可能性を証明する。

自由度2の Hamilton 系

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}(q_1^4 + q_2^4) + \frac{\epsilon}{2} q_1^2 q_2^2 \quad (1)$$

はその対称性より自明な特殊解(周期解)

$$q_1 \equiv 0 \quad (2)$$

を有する。 $q_2(t)$ は

$$\ddot{q}_2 + q_2^3 = 0$$