

- 2) K. Kondo, H. Takezoe, A. Fukuda and E. Kuze, Jpn. J. Appl. Phys. **21** (1982), 224.
- 3) N. A. Clark and S. T. Lagerwall, Appl. Phys. Lett. **36** (1980), 899.
- 4) K. Kondo, H. Takezoe, A. Fukuda, E. Kuze, K. Flatischler and K. Skarp, Jpn. J. Appl. Phys. **22** (1983), L294.
- 5) M. Yamashita, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983), 3735.
- 6) M. Yamashita, Ferroelectrics (1983) No. 12.
- 7) M. Yamashita, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984), No. 4.
- 8) M. I. Barnik, L. M. Blinov, A. N. Trufanov and B. A. Umanski, J. Phys. (France) **39** (1978), 417.

## 動脈脈波のソリトン模型

群馬大・工 坂西明郎

国立循環器病センター研 長谷川正光

### 1. 血液の循環

古来、ギリシャの哲人 Empedocles (BC470) が、“血液は生命である”といったように、正常な血液あるいは血液の循環は動物やヒトにとって不可欠の要件である。<sup>1)</sup> この血液の循環は心臓の収縮と拡張を原動力として、左心下部の左心室から大動脈・動脈・毛細血管・静脈・大静脈を経て右心上部の右心房へもどる、いわゆる体循環と、右心房より右心室・肺動脈・肺静脈・左心房へ至る肺循環がある。

表題の脈波は、上に述べた心臓の収縮と拡張に対応する最大血圧と最小血圧（それぞれ収縮期圧、拡張期圧またその差を脈圧という）の間の血圧変動に伴って、非常に弾性に富んだ動脈の血管壁が伸縮し、その弾性反跳力 (elastic recoil) によって、大動脈基主部から血液を隣接部に送りこむだけではなく、脈圧の波状伝播によって末梢部分の血液をさらに押し出す駆動力となる。心臓から拍出された血流は本来断続的に on-off される動きを示す筈であるが、動脈管の弾性によってより温和な血流に平滑化され、末梢にいくに従って、脈圧は増大し鋭くなるのに対して、血流の変動は除々に消滅していく。

2. 血管壁弾性の非線形性と戸田格子模型

血管壁の弾性は, 強い非線形性を示すことがよく知られている。第1図に, イヌの胸部大動脈上部血管壁について, 血管軸方向 (Longitudinal) と円周方向 (Circumferential) における応力・ひずみ曲線を示す。丸印は実験値で, 曲線は(1)式の指数関数による計算値である。<sup>2)</sup>

$$\sigma = \sigma_0 [\exp(r/r_0) - 1] \tag{1}$$

ここで,  $\sigma$  は応力,  $r$  はひずみで,  $\sigma_0$  と  $r_0$  は実験値を最もよく再現するように最小自乗法により次のように決めた。

$$\sigma_0 = 6.95 \times 10^5 \text{ dyne/cm}^2$$

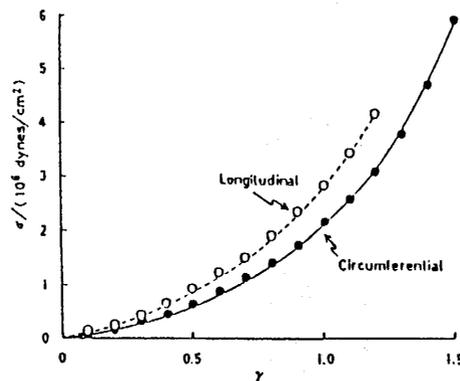
$$r_0 = 0.618_7 \text{ (血管軸方向)}$$

$$\sigma_0 = 3.98_5 \times 10^5 \text{ dyne/cm}^2$$

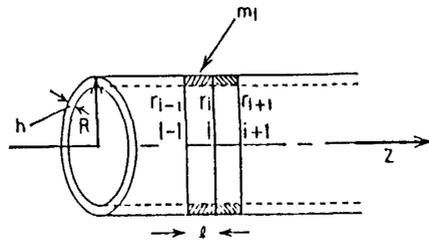
$$r_0 = 0.548 \text{ (円周方向)}$$

第1図は, 動脈壁の非線形弾性が実験誤差内でよく指数関数で表現されることが分る。

また(1)式は, 戸田格子のポテンシャルから得られる力と変位の関係をそれぞれ対応するひずみエネルギー関数から得られる応力とひずみの関係に置換えたものになっている。<sup>3)</sup> そこで第2図に, 戸田格子に類似した血管壁の非線形模型を示す。静止状態で半径  $R$ , 管壁の厚さ  $h$  の血管を血管軸の  $z$  方向に沿って等間隔  $l$  で格子に分割する。ある瞬間で,  $i$  番目の格子の半



第1図 イヌ胸部大動脈上部の血管壁における応力-ひずみ曲線。  
白丸は血管軸方向。黒丸は円周方向の実験値。破線と実線はそれぞれ対応する(1)式による計算値。



第2図 血管壁の非線形弾性な戸田格子模型。

径を  $r_i$  とし、質量を  $m_i$ 、血管壁に作用する力を  $F_i$  とすると、

$$F_i = m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \propto E [(r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}) + \alpha \{(r_{i+1} - r_i)^2 - (r_i - r_{i-1})^2\}] \quad (2)$$

ここで、 $t$  は時間、 $E$  と  $\alpha$  はヤング率と非線形パラメータでそれぞれ次のように与えられる。

$$E = \sigma_0 / r_0 = 1.123 \times 10^6 \text{ dyne/cm}^2$$

$$\alpha = 1/2 r_0 = 0.808 \text{ (血管軸方向)}$$

$$E = 0.727 \times 10^6 \text{ dyne/cm}^2$$

$$\alpha = 0.912 \text{ (円周方向)}$$

この結果、第1図に示すイヌの大動脈血管壁については、管軸方向と比べて円周方向では、ヤング率は小さく伸展性は高いが、 $\alpha$  が大きく非線形性が強いことが分る。

### 3. 基礎方程式とソリトン解

いま、血液を非圧縮性の完全流体とみなして、血管の半径方向の速度分布は無視すると、次の運動方程式を得る。<sup>4)</sup>

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

ここで、 $u$  は  $z$  方向の流速で、 $\rho$  は血液の密度、 $p$  は血管内の圧力である。血管の断面積を  $S$  とすると連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4)$$

$$S = \pi R^2 (1 + 2r) \quad (5)$$

ここで,  $r$  は円周方向のひずみである。一方, 瞬間的な血管半径  $r_i$  と圧力  $p_i$  によって,  $h \ll R$  の薄い管壁の場合には, ひずみ  $r$  と応力  $\sigma$  は次のようになる。

$$r = (r_i - R) / R \quad (6)$$

$$\sigma = p_i R / h \quad (7)$$

(4) 式と (5) 式から

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2 \frac{\partial r}{\partial t} \quad (8)$$

(3) 式と (8) 式から

$$2\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (9)$$

(9) 式の右辺については離散的な格子系へ戻して, 左辺は (1) 式の逆関数によって書き変えると,

$$2\rho l^2 r_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \log \left( 1 + \frac{p_i}{p_0} \right) \right\} = p_{i+1} + p_{i-1} - 2p_i \quad (10)$$

$$p_0 = \sigma_0 h / R \quad (11)$$

戸田格子において, よく知られているように (10) 式はソリトン解をもつ。<sup>5)</sup>

$$p_i(t) = (p_0 \sinh^2 \kappa) \operatorname{sech}^2(\kappa i - \omega t) \quad (12)$$

$$\omega = (1/l) \sqrt{p_0 / 2\rho r_0} \sinh \kappa \quad (13)$$

ソリトンの速度は

$$c = c_0 \sinh \kappa / \kappa \quad (14)$$

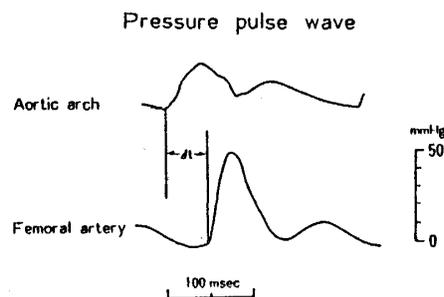
$$c_0 = \sqrt{p_0 / 2\rho r_0} = \sqrt{h\sigma_0 / 2\rho R r_0} = \sqrt{hE / 2\rho R} \quad (15)$$

$\kappa$  が零に近づくと, 即ちソリトンの振巾が小さいときは, 速度は減少して古典的な脈波理論と

一致する速度  $c_0$  に近づく。<sup>6)</sup> 従って、より大きな振巾では、通常のソリトンのように、脈波速度は増加するものと期待される。

#### 4. 動脈脈波について

最後に、動脈の圧脈波について述べてみる。圧脈波は、血管内にカテーテルにより圧トランスデューサを挿入して電氣的に測定することができる。ウサギの大動脈弓部と大腿動脈における一例を第3図に示す。心臓に近い大動脈弓部の波形に比べてより末梢の大腿動脈では、振巾



第3図 ウサギの大動脈弓部と大腿動脈における圧脈波。

平均血圧は 130 mmHg

が大きく立上りが鋭くなっている、いわゆる peaking 現象 steeping 現象が見られる。<sup>7)</sup> この現象は、平均血圧によっても著るしく影響される。平均血圧を増加させ振巾を上昇させて、第3図に示す脈波の立上り間の時間  $\Delta t$  を測定すると、大動脈弓部と大腿動脈間の血管長は  $28.0 \pm 0.5$  cm と分っているので、脈波速度が求められる。その結果、振巾とともに速度が増加することが認められた。<sup>8)</sup> 一般に末梢に行くと上記のように振巾が増加し、脈波速度が増すことも知られている。

さらに、戸田格子の電気回路模型による研究がなされているが、<sup>9) 10)</sup> 力学系と電気系の対応から steeping 現象 peaking 現象が血管にテーパのあることなど幾何学的要因によるのか、あるいは電気容量に相当するコンプライアンスの変化による力学的原因かを明らかにすることは今後の問題として興味あることと思われる。

なお、この論文の一部は厚生省循環器病研究委託費 57 公-3 による研究成果である。

#### 参 考 文 献

- 1) S. Oka: *Cardiovascular Hemorheology*, Cambridge University Press (1981).
- 2) A. Sakanishi, M. Hasegawa: *Rep. Prog. Polymer Phys. Japan* 25 (1982) 815.
- 3) 戸田: 非線形格子力学 (1978) 岩波書店

松川宏, 高山一

- 4) 岡: レオロジー —生物レオロジー— (1974) 裳華房
- 5) M. Toda: J. Phys. Soc. Japan **23** (1967) 501.
- 6) T. Young: Trans. Roy. Soc. London **98** (1808) 164.
- 7) 吉村: 脈波判読の実際 (1968) 中外医学社
- 8) A. Sakanishi, M. Hasegawa: Rep. Prog. Polymer Phys. Japan **26** (1983) 639.
- 9) R. Hirota, K. Suzuki: Proc. IEEE **61** (1973) 1483.
- 10) 渡辺: 数理科学 No 203 (1980) 13

## 不整合電荷密度波におけるソリトン

北大・理 松川 宏, 高山 一

一次元電子系においては, その特異なバンド構造のため波数  $Q = 2k_F$  ( $k_F$ : フェルミ波数) の摂動に対してフェルミ面が不安定となり, ギャップを生じる。電子系のこの性質を反映して一次元電子—格子系では, 格子変位と結合して電子密度が波数  $Q$  で空間的に波うつ電荷密度波 (CDW) 状態が可能となる。<sup>1-3)</sup> ここでは電子密度  $\rho$  は次のように表わされる。

$$\rho = \bar{\rho} + \rho_c \cos(Qx + \phi) \quad (1)$$

ここで  $\bar{\rho}$ ,  $\rho_c$  はそれぞれ平均電子密度及び CDW の振幅で,  $\phi$  は CDW の位相であり, 理想結晶中の基底状態では一定となる。しかし, 現実の結晶中には必ず何らかの欠陥が存在し, CDW はそのような欠陥との相互作用により, 空間的な歪みを生じる。この歪みは  $\phi$  の空間変化として表わされる。又, CDW は電荷を担うため, 電荷によって力を受け運動する事ができるが, この運動は又,  $\phi$  の時間変化として表わされる。

このような CDW はその波長

$$\lambda = 2\pi / Q$$

と, もとの格子の格子定数  $a$  との関係において, 次の 3 つの相に分類される。

1. commensurate (整合) 相:  $\lambda / a = m / n$  ( $m, n$ : 整数) の関係があるときで, この相では CDW と格子の相互作用が重要であり, それを考慮することにより位相  $\phi$  に対するハミルト