| | |
|---|---|
| Title | 対流系における局所エントロピー生成速度 |
| Author(s) | 高山, 光男 |
| Citation | 物性研究 (1984), 42(6): 713-718 |
| Issue Date | 1984-09-20 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/91443 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

物性研究 42－6（1984－9）

# 対流系における局所エントロピー生成速度

東邦大・薬　高　山　光　男

（1984年7月14日　受理）

## §1. はじめに

グランスドルフとプリゴジンは非線形領域までも含めた発展規準の研究において,[1] 対流系における熱流をフーリエの熱流と対流による熱流との和の形式で表わした。彼らによれば，対流系における熱流にともなう局所エントロピー生成速度は

$$\sigma[S] = J_1' X_1'$$

$$= (W_j + \rho h v_j)\left(\frac{\partial T^{-1}}{\partial j}\right) \geq 0 \qquad (1.1)$$

のように与えられ,[2] ここで $W_j$ は $j$ 方向へのフーリエの熱流を，$\rho h v_j$ は $j$ 方向への対流による熱流，そして $(\partial T^{-1}/\partial j)$ はこれらの熱流に共通した熱力学的力をそれぞれ表わしている。この形式は，流れの密度 $\boldsymbol{j}$ が伝導流と対流との和で構成されるという彼らの考え

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{cond}} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{conv}} \qquad (1.2)$$

に基礎をおいている。彼らも指摘しているように，対流を含む一般化流れ $J_1'$ と熱力学的 $X_1'$ との間に線形な現象論的関係は存在しない。にもかかわらず，彼らが対流系における局所エントロピー生成速度を（1.1）式のように与えたのは，発展規準の研究で流れの項と力の項とを区別して議論しなければならなかったからである。一般的な発展規準は次のような式で表わされる。

$$\frac{\partial_{X'} P}{\partial t} = \int \sum_{\alpha} J_\alpha' \left(\frac{\partial X_\alpha'}{\partial t}\right) \mathrm{d}V \leq 0 \qquad (1.3)$$

ここで $P$ は非線形系におけるエントロピー生成速度である。結局，彼らの主張は

---

TAKAYAMA, Mitsuo

$$\left(\frac{\partial X'_\alpha}{\partial t}\right) \leq 0 \tag{1.4}$$

のような発展規準を示すことにあったのだが，この目的のためには局所エントロピー生成速度を(1.1)式のように，流れ$J'_1$と力$X'_1$との積で表わすことが必要だったのである。対流系において熱力学的力が時間とともに減少するということは，二つの熱源間の温度差が減少することに対応しているので，発展規準の不等号を満たしている。しかし，発展規準のこの正しさにもかかわらず，(1.1)式が正しい物理的意味をもつかどうかここで確認する必要がある。

我々は，対流系におけるエントロピー生成速度の振動的様相を示すのに，フーリエの熱流だけがエントロピー生成速度に直接関係することを述べた。[3] 対流は線形の非平衡系の循環運動であるとして，上昇流と下降流がフーリエの熱流を増大させることを示した。対流運動そのものによるエントロピー生成は，流体内部や境界面における摩擦によって生じるのが主であろうから，我々はグランスドルフとプリゴジンの形式(1.1)には疑問をもたざるを得ない。

本稿では，形式(1.1)の不適切を指摘した後に，対流による局所エントロピー生成速度の正しい形式が系の空間的粗視化によって得られることを示す。

## §2. フーリエの熱流に与える対流の影響

重力と反対方向に$z$軸の正方向を選び，$z$方向へのフーリエの熱流を流れ$J_1$と力$X_1$とによって表わすと，現象論係数$L_{11}$を用いて

$$J_1 = L_{11}\left(\frac{\partial T^{-1}}{\partial z}\right) = L_{11}X_1 \geq 0 \tag{2.1}$$

のように書くことができる。ここで現象論係数$L_{11}$と熱伝導係数$\lambda$とは

$$\lambda T^2 = L_{11} > 0 \tag{2.2}$$

のような関係にある。いま，熱力学的力の定義域をとなり合う局所平衡系間の距離$\delta$の程度に選ぶと

$$X_1(\delta) = \left(\frac{\delta T^{-1}}{\delta z}\right) \geq 0 \tag{2.3}$$

のように書くことができる。ここで記号$\delta$は，空間的に十分に小さいが熱力学的記述が可能な局所平衡系の大きさの程度と考えて差しつかえない。しかし，この程度の空間領域では対流運動が起こらないであろうから，熱力学的力の空間的定義域のスケール変換($\delta \rightarrow \Delta$)を行

なう。これによって熱力学的力は

$$X_1(\varDelta) = \left(\frac{\varDelta T^{-1}}{\varDelta z}\right) \geq 0 \tag{2.4}$$

のように書くことができ，記号$\varDelta$は二つの熱源間の距離の程度で，十分に巨視的である。対流の起こらない線形領域では，スケール変換によって熱力学的力の値も熱流の値も不変であるから，次のような等式が成立する。

$$X_1(\delta) = X_1(\varDelta), \quad J_1(\delta) = J_1(\varDelta) \tag{2.5}$$

この不変性は，スケール変換の前後における熱流形態の対称性を意味している。ところが対流が始まるやいなや，流れ$J_1(\varDelta)$はフーリエの熱流ではなくなってしまい，熱力学的力$X_1(\varDelta)$もまたフーリエの熱流に共役な力としての意味を失なってしまう。このような状況では，もはや$X_1(\varDelta)$を熱力学的力として認めることはできない。

対流を線形の非平衡系の循環運動とみなす我々の立場では,[3] フーリエの熱流は主に上下の各々の熱源と流体との接触面近くにおいてだけ生じていると考える。このようにすると，対流の始まりにおいて下部熱源と接触している線形系の温度はほぼ下部熱源の温度と等しくなっているので，熱力学的力は$X_1(\varDelta)$の値に一致し小さいであろう。この線形系が上昇流として上部熱源に向かって運動すると，上部熱源との間の距離$\varDelta z$が減少し，最終的に上部熱源と接触したときには局所平衡条間の距離$\delta z$にまで減少していると考えられる。しかし，このときの線形系の温度はほぼ下部熱源の温度に等しいので，熱力学的力$X_1(\varDelta)$の分母だけが少さくなると考えられ，これによって熱力学的力は急激に増大するのである。すなわち，対流運動の始まりにおいては熱力学的力のスケール変換（$\varDelta \to \delta$）をもたらし，定常的な対流運動に到るまでのフーリエの熱流の時間変化は，境界条件と観測位置を一定として

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = L_{11}\left(\frac{\partial X_1}{\partial t}\right) > 0 \tag{2.6}$$

のように与えられるであろう。これから局所エントロピー生成速度の時間変化も

$$\frac{\partial \sigma[S]}{\partial t} = L_{11}\left(\frac{\partial X_1^2}{\partial t}\right) > 0 \tag{2.7}$$

のように与えられるであろう。このときの局所エントロピー生成速度の増加は

$$\begin{aligned} \varDelta\sigma[S] &= \sigma[S]_c - \sigma[S]_0 \\ &= L_{11}\left\{\left(\frac{\varDelta T^{-1}}{\delta z}\right)^2 - \left(\frac{\varDelta T^{-1}}{\varDelta z}\right)^2\right\} > 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

によって与えられ，$\delta z < \Delta z$ から不等号の向きは明らかである。このように，対流状態においてもなおフーリエの熱流によって局所エントロピー生成速度を定義することができるということは，線形の非平衡熱力学の方法を非線形領域にも適用できることを意味している。我々にとってこのことは非常な便利をもたらしている。但し，対流系における局所エントロピー生成速度 $\sigma[S]_c$ の値は系内の位置によって異なっている。

以上から，対流系では熱力学的力 $X_1(\Delta)$ が意味を失なってしまうことを考えると，(1.1)式の物理的意味はまったく不明瞭になってしまうことがわかる。実際，次に示すように対流そのものによる局所エントロピー生成速度の形式は，グランスドルフとプリゴジンによる形式とは異なり，むしろ古典熱力学的となる。

## §3. 対流による局所エントロピー生成速度

前項に述べたように，対流の効果はフーリエの熱流を増大させることにあり，対流そのものによるエントロピー生成は内部摩擦によって生じるだけである。ところで，グランスドルフとプリゴジンによる対流にともなう局所エントロピー生成速度は

$$\sigma[S] = h\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^{+}\left(\frac{\partial T^{-1}}{\partial z}\right) \geq 0 \tag{3.1}$$

のように書くことができ，ここで $h$ は部分モルエンタルピーを，$(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)^{+}$ は $z$ 方向への対流速度をそれぞれ意味し，対流速度は正値をもつ。この形式は，熱力学的力をフーリエの熱流の場合と共通にするために与えられたのであって，このような形式にするための理論的根拠があるわけではない。しかし，対流そのものによる局所エントロピー生成速度の式を与えることがまったく不可能なわけではない。系の粗視化を考えることによって，古典熱力学にその基礎を求めることができる。

非平衡熱力学の特徴の一つに，流れと力との間の線形関係を与えている現象論係数の存在がある。この係数は熱力学的変化（流れ）の経路の存在とその程度を定量的に表わしている。すなわち，現象論係数の存在と正値，$L_{ij} > 0$，は，熱力学的変化の起こるための速度論的条件を与えている。一方，熱力学的力の正値，$X_j > 0$，は，変化のための熱力学的条件を与えている。このように非平衡熱力学が熱力学的変化の起こるための必要十分条件から構成されているのに対し，古典熱力学は熱力学的条件だけから構成されている。すなわち，古典熱力学には変化の経路を与えるような現象論係数は存在しない。それ故，対流系のように流れと力との間に現象論的関係が存在しなくなるような場合，我々は再び古典熱力学に戻らなければならない。このことは，現象の粗視化の立場に立つことを意味している。現象の粗視化

とは，温度差のある二つの熱源間を熱が移動するということだけに注目し，どのような熱流形態であるのかという現象の詳細は問わないことである。これはまさに古典熱力学の立場である。

最初に古典熱力学による局所エントロピー生成速度の式から始める。すなわち

$$\sigma\,[S] = \frac{\mathrm{d_i}\, h_1}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right) \geq 0$$
$$\frac{\mathrm{d_i}\, h_1}{\mathrm{d}t} > 0\,,\quad T_1 \leq T_2 \tag{3.2}$$

これは，現象論的関係なしに熱（部分モルエンタルピー）が系 2 から系 1 へ移動することを意味しており，熱の輸送形態は問わない。いま，部分モルエンタルピーの実質微分をとる。すなわち $z$ 方向に関して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h = \frac{\partial}{\partial t}h + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \tag{3.3}$$

のように書くことができる。いま定常条件，$(\partial h/\partial t)_z = 0$，の下で，熱が $z$ 方向の温度勾配に沿って対流によって運ばれるとすれば，熱力学的関係

$$h = c_{\mathrm{p}} T \tag{3.4}$$

を用いて，(3.3) 式は次のように書くことができよう。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h = -c_{\mathrm{p}}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^{+}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) > 0 \tag{3.5}$$

古典的な局所エントロピー生成速度の式 (3.2) を考慮して，対流による局所エントロピー生成速度は次のように表わすことができよう。

$$\begin{aligned}\sigma\,[S] &= -\frac{1}{T}\,c_{\mathrm{p}}\,v_z^{+}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\ &= -\,c_{\mathrm{p}}\,v_z^{+}\left(\frac{\Delta \ln T}{\Delta\ z}\right)\\ &\simeq -\,c_{\mathrm{p}}\,v_z^{+}\left(\frac{\Delta \ln T}{\Delta\ z}\right) \geq 0\end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで $v_z^{+}$ は $z$ 方向への対流速度で，ここでは上昇流に対応している。また (3.6) 式における記号 $\Delta$ は，温度勾配が十分に巨視的な空間的定義域で差によって与えられていることを意味している。粗視化されていることによって，記号 $\delta$ は意味をもたない。この事情は，前項における立場とはまったく逆である。

(3.6)式の符号を満たすためには次の二つの条件が考えられる。

$$\text{a.}\quad v_z^+ > 0\ ,\quad \left(\frac{\Delta \ln T}{\Delta z}\right) \leq 0$$

$$\text{b.}\quad v_z^- < 0\ ,\quad \left(\frac{\Delta \ln T}{\Delta z}\right) \geq 0$$

しかし，これらの条件は(3.6)式に対して対称的ではなく，特に温度勾配を反転させた条件bでは対流運動は止まってしまい，熱流形態はフーリエの熱流に移行してしまう。すなわち，条件bは実際には起こらないものである。ところで，対流系で実際に起こっているもう一つの条件に

$$\text{c.}\quad v_z^- < 0,\quad \left(\frac{\Delta \ln T}{\Delta z}\right) < 0$$

がある。これは下降流に対応している。この条件を(3.6)式に用いることによって得られる負の局所エントロピー生成速度は見掛け上の結果であり，熱力学的に重要な意味をもつものではない。この結果は，対流運動が本質的に熱力学的な変化ではないところに帰因し，(3.6)式の不完全さを示している。さらに，この式が流れ$J_1$と力$X_1$との項に明確に区別できないところにも不完全さがある。

## §4. おわりに

対流そのものによる局所エントロピー生成速度は，粗視化によってのみ一応の物理的意味を得るのだが，その形式はグランスドルフとプリゴジンによる形式とは異なっている。この結果は(1.1)式の不適切性を示すものであるが，重要なのはフーリエの熱流と対流による熱流とでは拠って立つべき基礎も視点も異なるということである。結局，対流系においてもなお，エントロピー生成速度の議論はフーリエの熱流に基礎をおくべきであるということができる。

## 参考文献

1) P. Glansdorff and I. Prigogine: Physica, **30** (1964) 351.

2) P. Glansdorff and I. Prigogine: *Thermodynamic Theory of STRUCTURE, STABILITY AND FLUCTUATIONS*, (Wiley Interscience, 1971) 122.

3) 高山光男：物性研究，41－6 (1984) 421.