

Title	三角格子スピン系(有限系)の量子カオスと古典カオス(秩序化過程における協力と乱れ-その動力的研究-(第2回),科研費研究会報告)
Author(s)	中村, 勝弘
Citation	物性研究 (1984), 43(2): 69-71
Issue Date	1984-11-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91477
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

三角格子スピン系(有限系)の量子カオスと古典カオス

福岡工大・教養 中村勝弘

完全可積分系の研究が終局(完成)に近づくにつれ、非可積分Hamilton力学系の研究が本格化している。Fermi-Pasta-Ulamの非線型格子系(非線型相互作用で結合した振動子系)の研究も、long-time tailの問題とも関連させて、再び活発になりつつある。

既に報告したように^{1), 2)} lattice spin系とでも言うべき、反強磁性相互作用(XXZ型)で結合したregular triangle上の3個の古典Heisenberg spin系は、高エネルギー領域でKAM、低エネルギー領域でirregular orbitを産み出す。これは、Hénon-Heiles系やSinaiのBilliardと対照的な事実である。

ここでは、上の非可積分古典spin系の量子論的counterpartについて考察する。興味のあるのは、spinの値が大きい半古典的な領域のlevel distributionにある。XXZ型の量子spin Hamiltonianは、

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} \left\{ (S_i^+ S_j^- + c.c.) / 2 + W S_i^z S_j^z \right\} \dots \textcircled{1}$$

で与えられる。3個のspinは正三角形に配置しているので、周期境界条件のある1次元系と同じである。①のeigenstatesは、3つの量子数のセット(i) 格子の並進不変性からくる全波数 k , (ii) spin空間のplanarな回転不変性からくる全磁化 M_z , (iii) 正三角形のmirror symmetryからくるparityで特徴づけられる。例えば、 $k, M_z, \text{even parity}$ で指定される基底の1組は、 $M_+ M_+ M_- = M_z$ として次の式で与えられる。

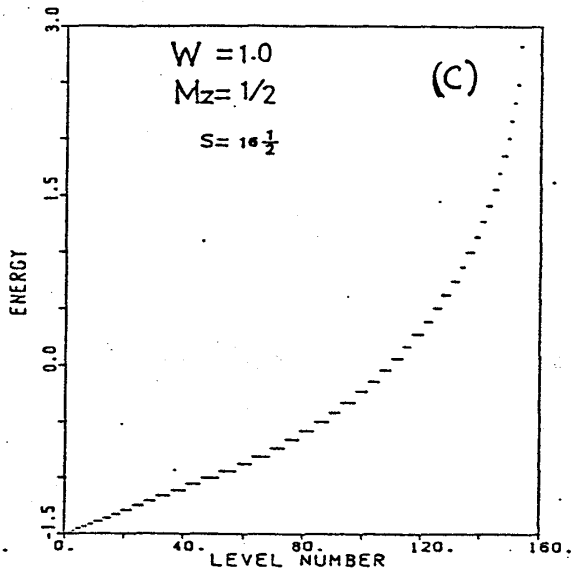
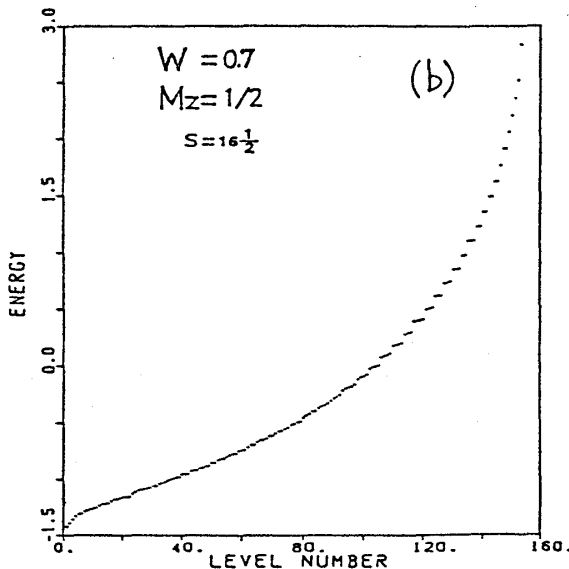
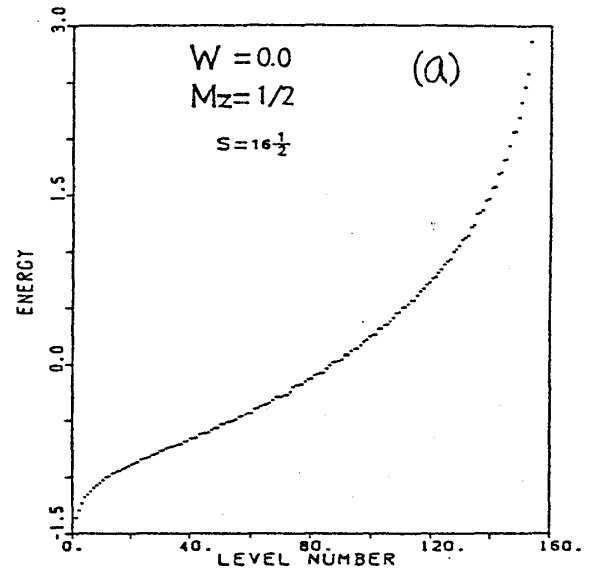


図1
 $k=0, M_z=1/2$
 even parity
 に属する
 levelの分布
 (a) $W=0.0$
 (b) $W=0.07$
 (c) $W=1.0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (|s, M_1\rangle \otimes |s, M_2\rangle \otimes |s, M_3\rangle + e^{iK} |s, M_1'\rangle \otimes |s, M_2\rangle \otimes |s, M_3\rangle + e^{2iK} |s, M_1\rangle \otimes |s, M_2'\rangle \otimes |s, M_3\rangle) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} (M \leftrightarrow M') \right] \dots \textcircled{2}$$

$$W = 0.0$$

$$M_z = 1/2$$

$$\circ \text{---} S = 22\frac{1}{2}$$

$$\triangle \text{---} S = 16\frac{1}{2}$$

$$x \text{---} S = 14\frac{1}{2}$$

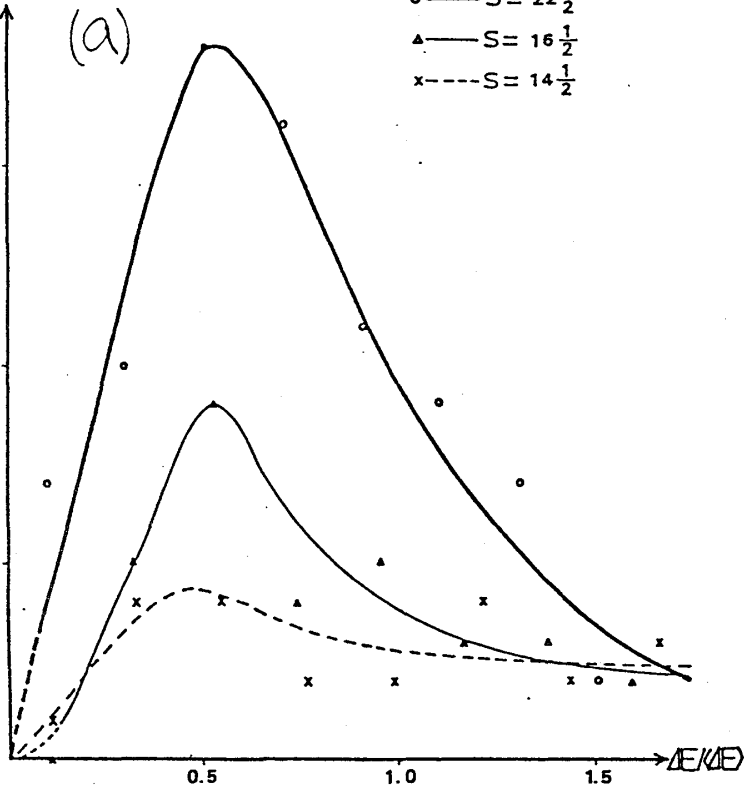
以下の計算では $K=0$, $M_z = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$,
even parity で指定される manifold
の中での対角化を行った。
得られた energy level を $s(s+1)$ の
scale におくと、 S_0 値によらずに
定まった energy 領域に level が
分布する。 S_0 値を大きくすると、level
はより密に分布することになる。

$S = 16\frac{1}{2}$ の $W = 0.0, 0.7, 1.0$ の場合
の level 分布が 中2図 (a), (b), (c) に各々
示してある。 $W = 0.0, 0.7$ の時は、高エネルギー
領域で level が cluster をつくり、
各 cluster が階段 (stair) で隔つてい
る。低エネルギー領域では、level 間の
強い斥力型相関のため、level は一様に
分布している。 $W = 1.0$ の時は、全エネルギー領域
で degenerate cluster をつくり、
regular な階段構造がつくられている。
これは、 $W = 1.0$ の時、①は完全可積分
となることの反映である。

$W \neq 1.0$ の時の level の分布が後
統計を調べるために、隣接する
level 間の level 間隔の分布
を調べ、中2図 (a), (b) に示した。
中2図 (a) は、全エネルギー level のうち、
lowest $\frac{1}{3}$ の level を採用し、level 間
隔 $\Delta E_i = E_{i+1} - E_i$ の分布を調べたもの
で、spin 値を大きくすると、次第に、
Wigner-Dyson 分布:

$$P(t) = \frac{\pi}{t} \exp\left(-\frac{\pi}{4} t^2\right) \dots \textcircled{3}$$

$$t = \Delta E / \langle \Delta E \rangle$$



中2図
level 間隔の分布
(a) lowest $\frac{1}{3}$
(b) intermediate $\frac{1}{3}$

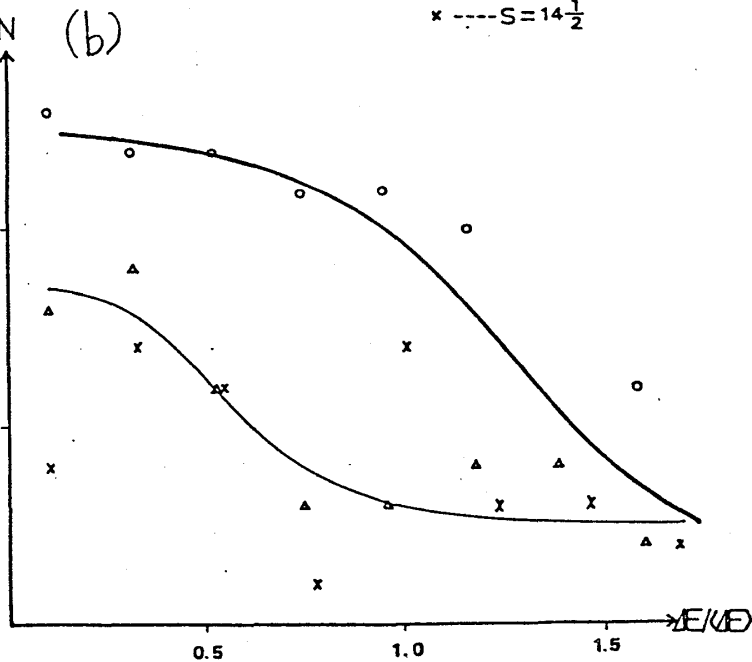
$$W = 0.0$$

$$M_z = 1/2$$

$$\circ \text{---} S = 22\frac{1}{2}$$

$$\triangle \text{---} S = 16\frac{1}{2}$$

$$x \text{---} S = 14\frac{1}{2}$$



に近づいていくことがわかる。中2図(b)は、intermediate $\frac{1}{3}$ level を採用し、level 間隔の分布を調べたもので、 $\lim_{t \rightarrow 0} P(t) \neq 0$ を満たす分布に近づいていく。これは必ずしも Poisson 分布:

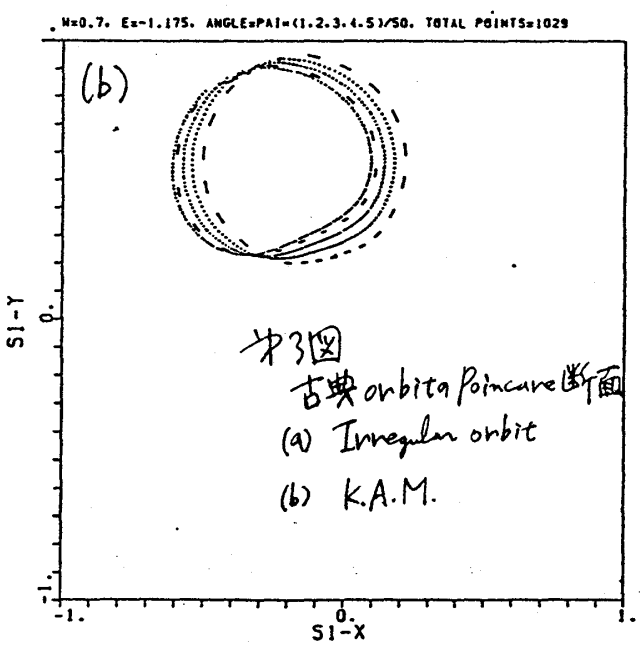
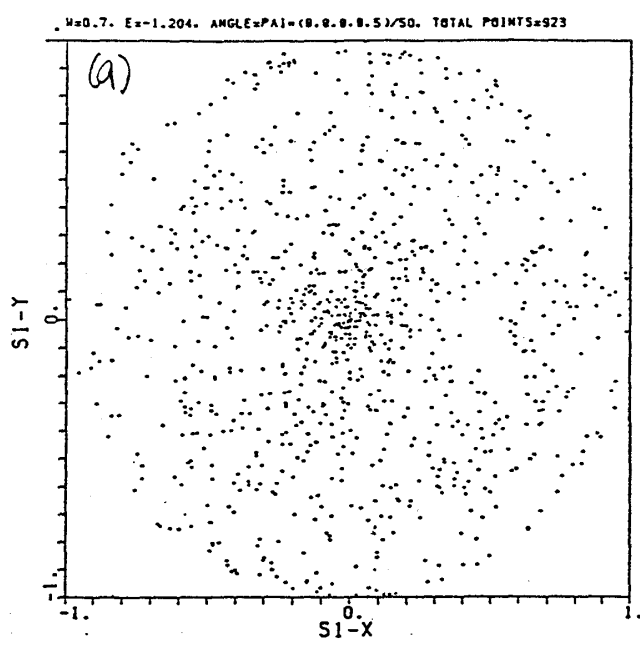
$$P(t) = \exp(-t) \dots \textcircled{4}$$

に収束しないようである。W=0.7 の場合も、同様の結果を得ている。W=1.0 の場合は、このエネルギー領域に着目しても、 $P(t) = S(t)$ の形になる。これは可積分系の特徴である。

Wigner 分布は、level 間に斥力型の相互作用があると仮定して、又、Poisson 分布は、level 間に相関がないと仮定して導くことができるが、より基本的なのは、Random matrix の eigenvalue の分布 (Dyson) から系統的に得られる。

全く、不思議なことは、Hamiltonian ① に random な摂動が存在しないにもかかわらず、level の分布が random になることである。古典極限の場合と同様な事態が、ここでも出現している。ちなみに、Wigner-Dyson 分布が成立する低エネルギー領域では、古典極限である。中3図(a)のように、spina Irregular orbit が期待でき、 $\lim_{t \rightarrow 0} P(t) \neq 0$ を満たす分布 $P(t)$ が成立する intermediate 領域では、古典極限で K.A.M. が期待できる (中3図(b))^{1), 2)}。

さて、量子極限から古典極限へ移行する時、つまり $S \rightarrow \infty$ とする時、量子力学固有の概念である level 間隔が、S についていかなる scaling 則に従うかは最大の問題であるが、これについての詳細は別の機会に述べたい。



中3図
古典 orbit の Poincaré 断面
(a) Irregular orbit
(b) K.A.M.

文献

(1) K. Nakamura: 有限古典 spin 鎖の spin wave と irregular motion (ツリトンのダイナミクスとそれに関わるカオスの研究会, 基研1983年12月, 物性研究掲載予定)
 (2) K. Nakamura: 三角格子古典 Heisenberg spin 系の Chaos (ランダム系の秩序化, 科研費研究会1983年12月, 物性研究掲載予定) (箱根)