

駆動された非線形シュレーディンガー方程式 における低次元のカオス

名大・理 野崎一洋, 戸次直明

§ 1. はじめに

無限自由度の散逸力学系において, しばしば低次元のカオスがみられるが, 実際に低次元への遷滅を実行することは一般には困難である。ところが, ソリトン系(可積分)に近い系では, 基準モードであるソリトンと輻射(ソリトン以外のモード)を基底にとれば, 低次元への遷滅が比較的容易に実行されることが期待される。実際, ソリトンのみを基底とする低次元空間におけるカオスについてはすでに報告した¹⁾ここではソリトンと外部擾動の直接的相互作用のみではカオスが起こらず, 輻射との相互作用を介してカオスに至る場合を, より物理的な非線形シュレーディンガー方程式

$$ig_t + g_{xxx} + 2|q|^2q = -irq - i\epsilon \exp(i\omega t), \quad (1)$$

($r, \omega > 0$)を例として議論する。この方程式で記述される物理現象としては, プラズマ振動数よりも少し低い振動数をもつ外場で駆動されたプラズマ波,²⁾ 交流電場で駆動された一次元凝縮体³⁾などが考えられる。

§ 2. 低次元系への遷滅

$|\epsilon|, r (\ll 1)$ を擾動パラメータとして, $q(x, t)$ をソリトンと一様な強制振動($\sim i\epsilon/\omega \exp(i\omega t)$)のまわりで, ハミルトン系の擾動法と逆散乱法を使って展開し, 2次の効果まで残す。そして, 小振幅の輻射については, 波数 ≈ 0 の成分だけ(がソリトンと主に相互作用する)を残すと, ソリトンと輻射(波数 ≈ 0)の「座標」に対する4変数の常微分方程式系(遷滅系)を得る。具体的な形については文献2)を参照。この遷滅系の解を調べることにより, 固定点から, ホップ分岐, 周期倍化を経て, カオス的なアトラクターがソリトンと輻射を基底とする4次元空間に現われることがわかった。言い換えれば, 位相がロックされ, 振幅が一定のソリトンから, ロ

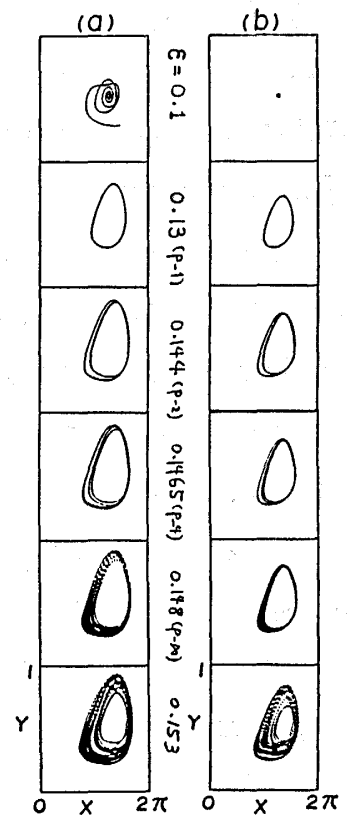


図 1

クがはずれ、周期的な振幅振動をするソリトンを経て、振幅、位相ともカオス的に振動するソリトンに分岐する(図 1. b)。

§ 3. 数値実験との比較

図 1 に, (a) 元の系(1)の数値実験によって得られたアトラクター, (b) 遷滅系のアトラクター(いずれも平面への射影)を示す。但し, $\omega = 1$, $r = 0.1$, $X = \arg \{q(x_m, t)\} - \omega t \pmod{2\pi}$, $Y = |q(x_m, t)|/2$, x_m は $|q|$ が最大となる場所。

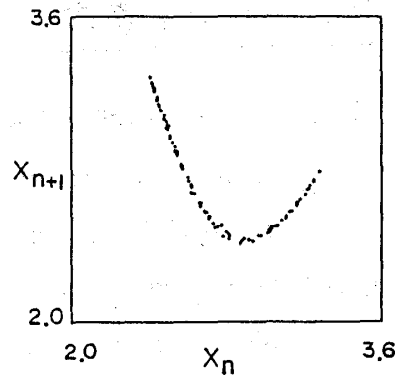


図 2

$\epsilon \leq 0.153$ では, 遷滅系は元の系(1)の分岐現象をよく再現している。 $0.148 \leq \epsilon \leq 0.152$ のカオスは図 2 に示す 1 次元マップ(~ 2 次関数) で特徴づけられる。

X_n は位相 X の n 番目の極小値。 $0.152 \leq \epsilon$ のカオスは 1-D マップでは特徴づけられない。更に ϵ を増大させると ($0.154 \leq \epsilon$), 遷滅系はほとんど有効でなくなるが, (1) の数値実験の結果によれば, $0.157 \leq \epsilon \leq 0.177$ で, カオス的なアトラクターは消え, 一様な強制振動が唯一のアトラクターとなる。 $0.177 \leq \epsilon \leq 0.26$ で再びソリトンが現われるが, それらは不規則な発生, 消滅をくり返す。 $0.26 < \epsilon$ では, 一様な強制振動さえ

表 1

TABLE I. A sequence of bifurcations.

ϵ	Attractors	Reduced system
0.6	Forced oscillation (F.O.)	
-0.105	Fixed point (phase-locked soliton) & F.O.	
-0.140	Period 1 & F.O.	
0.145	Period 2 & F.O.	
0.147	Period 4 & F.O.	
0.148	Period 8 & F.O.	
0.152	Chaotic attractor I (1-D map) & F.O.	
-0.156	Chaotic attractor II (no 1-D maps) & F.O.	
-0.156	Period 3 & F.O.	
0.157	Chaotic attractor II & F.O.	
-0.177	F.O. (no chaotic attractors)	
-0.177	Irregular creations and annihilations of solitons & F.O.	
-0.26	Onset of O.T.S.I. (complicated chaotic states)	

不安定化し非常に複雑な発展したカオス状態へ移行する。これらの結果は表 1 にまとめた。

おわりに, ここで述べたソリトンのアトラクターは, 初期値としてソリトンのみならず, 一様な共鳴振動 ($2|q|^2 \sim \omega$) の変調不安定化からも到達できるほど, その流域は広いことを強調しておく。

参考文献

- 1) K. Nozaki, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1883; K. Nozaki and N. Bekki, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1226; K. Nozaki and N. Bekki, Phys. Lett. **102A** (1984) 383.
- 2) K. Nozaki and N. Bekki, Preprint DPNC85-01.
- 3) D. J. Kaup and A. C. Newell, Phys. Rev. **B18** (1978) 5162.