

セパトリクス近傍のカオスのリヤプノフ数と拡散定数像になっている。よって、ほとんど至るところの χ から出発した軌道は不安定である。 τ が大きな値のとき、発振モードを求めようとするとき、マッピングの回数を多くとらねばならないので、 χ の値がわずかに違っても、全く異なる値の発振モードが得られることになる。

(4) 図2にみられるセルフシミラリティは、連分数展開の階層性が反映されたものである。図において、低次の展開係数のみで表わせる有理数の近傍にある χ に対する値が荒い骨組を構成している。多くの展開係数を必要とする有理数近傍の χ に対する値ほど、細かい構造を表わすものに対応している。

参考文献

- 1) K. Ikeda, M. Mizuno, Phys. Rev. Lett. 53 (1984), 1340.
- 2) 高木貞治「初等整数論講義」

セパトリクス近傍のカオスのリヤプノフ数と拡散定数

静岡大・教養 長島弘幸
 テキサス大・物理 T. Y. Petrosky
 山口喜博

セパトリクス近傍に生ずるカオスについて、リヤプノフ数を解析的に求め、Chirikovによって与えられた拡散定数 D_{CH}^1 との関係をも明らかにする。

考える系の運動方程式は

$$\ddot{x} = x - x^3 + g x \cos(\omega t + \beta_0) \tag{1}$$

である。ここで g は1よりも充分小さい数とする。系のポテンシャルは二重井戸型(図1)で $V(x) = -x^2/2 + x^4/4$ である。

$g \neq 0$ の場合には、ホモクリニシティによりセパトリクス近傍に、ストカスティック層という乱雑領域が形成される。 $g = 0$ の場合、セパトリクス (x_0, p_0) は

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{2} \operatorname{sh}(t - t_0) \\ p_0 &= -\sqrt{2} \operatorname{sh}(t - t_0) \operatorname{th}(t - t_0) \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる。(1)式の解を, g を展開パラメタとする摂動計算により求める。

$$\begin{aligned} x &= x_0 + gx_1 + \dots \\ p &= p_0 + gp_1 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

これにより, $O(g)$ の方程式として

$$\ddot{x}_1 = x_1 - 3x_0^2 x_1 + x_0 \cos(\omega t + \beta_0) \quad (4)$$

が得られる。この式の解を同次方程式 $\ddot{x}_1 = x_1 - 3x_0^2 x_1$ (4') の解より, 定数変化法により求める。(4') の解 $x_{1h}^{(1)}, x_{1h}^{(2)}$ は

$$x_{1h}^{(1)} = \frac{\text{sh}t}{\text{ch}^2 t}, \quad x_{1h}^{(2)} = \text{cht} - 3 \frac{1}{\text{cht}} + 3t \frac{\text{sh}t}{\text{ch}^2 t}$$

で与えられる。

$$x_1 = -\frac{1}{2} \left[\int^t dt x_0 x_{1h}^{(2)} \cos \beta \right] x_{1h}^{(1)} + \frac{1}{2} \left[\int^t dt x_0 x_{1h}^{(1)} \cos \beta \right] x_{1h}^{(2)} \quad (5)$$

である。 $x (= x_0 + gx_1)$ の初期値として $t \rightarrow -\infty$ において $x_1 \rightarrow 0$ をとると, 不安定マニフォールドの解が得られ, それを x_1^U と書く。その $t \rightarrow \pm\infty$ における漸近形は

$$x_1^U(t) = \begin{cases} 2\sqrt{2} e^{(t-t_0)} & t \rightarrow -\infty \\ 2\sqrt{2} e^{-(t-t_0)} - \frac{g\Delta_1(t_0)}{4\sqrt{2}} e^{(t-t_0)} & t \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (6)$$

ここで $\Delta_1(t_0) = \tilde{A} \sin(\omega t_0 + \beta_0)$ および

$$\tilde{A} = \frac{\pi\omega^2}{\sinh \frac{\pi\omega}{2}}$$

である。 $g\Delta_1(t_0)$ はメルニコフ積分であり, 軌跡の平均周期 $T_a = \ln(16e/\omega g\tilde{A})$ 当りのエネルギー変化を与える。

ここでリアプノフ数を1次の摂動の範囲で求めることを試みる。系を時間を一つの変数として, オートノマス系と考えると, 変数の数は3であり, リアプノフ・スペクトラムは $(\lambda, 0, -\lambda)$ となる。

ここで λ として, 不安定マニフォールド内での軌道による指数を考える。不安定マニフォールド上の接近した二つの軌道間の距離 d を次のように表わす。ただし μ は初期値を特徴づける

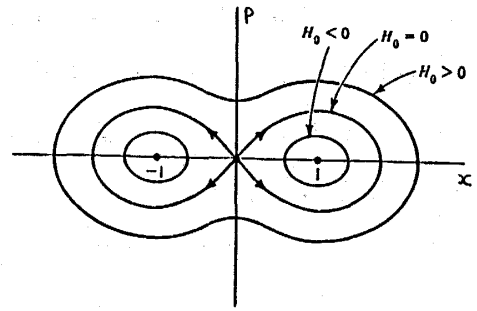


図1 二重井戸ポテンシャルにおける軌道

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

パラメタ (例えば t_0) である。

$$d(t, \mu) = |\delta\mu| \left[\left(\frac{\partial x_{(1)}^U(t, \mu)}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_{(1)}^U(t, \mu)}{\partial \mu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ストカスティック層内の軌道の一周当りのリアプノフ数 λ は

$$\lambda = \frac{1}{T_a} \ln \frac{d(T_a, \mu)}{d(0, \mu)} \quad (8)$$

で与えられる。

何周にわたってもそのリアプノフ数を求めることは摂動計算の適用外であり不可能なので(8)の λ をストカスティック層内で平均することとする。平均操作は初力の初期位相と、ストカスティック層のエネルギーについて行なう。

以上の操作を原点付近より出発する軌道に関するリアプノフ数について行なうと、平均リアプノフ数 $\bar{\lambda}$ は

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2T_a} \ln \left\{ 1 + (1 + \omega^2) e^2 \frac{D_{CH} T_a}{W^2} + \sqrt{1 + 2(1 + \omega^2) e^2 \frac{D_{CH} T_a}{W^2}} \right\} > 0 \quad (9)$$

となる。ここで D_{CH} は先に述べたChirikovによって与えられたエネルギー空間での拡散係数で $D_{CH} = g^2 \tilde{\Delta}^2 / 2T_a$ である。また W はストカスティック層のエネルギー幅で $W = \omega g \tilde{\Delta}$ である。

式(9)より、 $D_{CH} > 0$ ならば $\lambda > 0$ となる。

これはカオスにより誘起された拡散現象を特徴づける量 D_{CH} と、カオスの力学的量 λ の関係としては適切である。

式(9)で重要な点は \ln の中には g 依存性がないという点で、これは g のオーダーの項を $1/g$ 程度の大きさ e^{T_a} にわたって評価したためである。したがって $\bar{\lambda}$ の g 依存性は $T_a = \ln(16e/\omega g \tilde{\Delta})$ よりのみ表われる。

式(9)と実際の計算機シミュレーションの結果を比較すると、図2のようになり一致はきわめて良い。

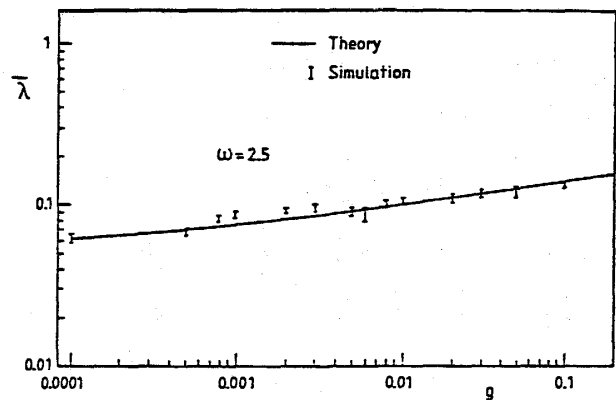


図2 $\bar{\lambda}$ の g 依存性

参考文献

- 1) B. V. Chirikov, Phys. Reports 52, 263 (1979).