

境界競合による Frustrated Instability と初等数論的秩序  
 期倍化分岐がおこる。しかし最確定軌道はそのうちの1つである。

(なお、本研究の一部は小幡常啓氏との共同研究に基づくものである。)

### 参考文献

- 1) H. Hara, Phys. Rev. **B20** 4062 (1979).
- 2) H. Hara, Z. Physik **B29** 159 (1981).
- 3) H. Hara and T. Obata, Phys. Rev. **B28** 4403 (1983).
- 4) 原 啓明：研究会「確率過程，場の理論と統計力学」数理研，1983年3月。
- 5) T. Morita and H. Hara, Physica, **125A** 607 (1984).

## 境界競合による Frustrated Instability と初等数論的秩序

京大・理 水野正彦，池田研介

複合共振器からなる光学系は，発振モードが共振器の長さに敏感に依存するという性質を持っている。たとえば，半導体レーザーでは，ファイバー等を接続すると，その端面が自然のミラーの働きをするため，モードホッピングが容易におこることが知られており，現在，工学の分野で問題になっている。

レーザーとは異なるが，図1に示す光学系において，共振器の長さとの関係性を調べたので，その結果について報告する。図1のシステムは，共振器内に非線形誘電媒質が挿入されており，左方よりレーザー光が入力されると，その光は2のミラーを透過した後，2つの経路(2→3→1, 2→4→3→1)をとおり

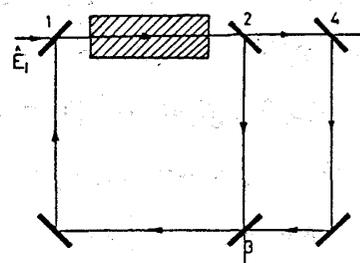


図1

り非線形媒質にフィードバックされるという構造をもっている。入力するレーザー光の強度が低ければ，糸内に生じる電場の振幅は定常値に緩和するのであるが，入力光の強度を増してゆくと，この定常解はある点で不安定になり，かわって振動解が出現する。このときの発振モードは定常解の線形安定性を調べることによって求めることができ，それを示したのが図2である。

図2の横軸  $\chi$  は重合する2つの共振器の長さの比  $r = l_1/l_2$  ( $l_1, l_2$  は図1の2つの閉じた

経路の長さを表わす。)より決まる量である。 $(\chi = |1-r|/(1+r))$ 縦軸には, それぞれの $\chi$ に対する発振モードの逆数がプロットしてある。また, 図中にある $\tau$ は, 共振器の大きさに関係する量であり,  $\tau = (l_1 + l_2)/2c$ である。(cは光速)

図2には, セルフシミラーな構造があらわれており, (a)(b)両図を見比べてわかるように,  $\tau$ の値が大きくなるとともに, その細部の構造が出現するという特徴がある。(b)図にみられるように,  $\tau = 10^4$ になると,  $\chi$ の値に対して発振モードは敏感に変化し, わずかに共振器の長さが変

わっても, 全く異なるモードの発振が誘起されることが示唆できる。また $\chi$ の変化に対して発振モードは恒に階段状に変化するという特徴があり, (b)図においてもその構造は保たれている。

ここで得た結果を理解するため線形解析の手続きを再考し, 更に初等数論の方法を用いると,  $\chi, \tau$ が与えられたとき発振モードを求めるスキームを次のように整理することができる。

- (1) 発振モードは重合する2つの共振器にとともにほどよく共鳴するものである。それは $\chi$ の値の連分数展開に関して求めることができる。 $\chi$ を連分数に展開し, 逐次その近似分数を求める。この分数列 $\{p_n/q_n\}$ を主近似分数とよび, 次にこの間をうめる中間近似分数列 $\{(p_{n-1} + mp_n)/(q_{n-1} + mq_n)\} m=1, 2, \dots$ をつくる。発振モードはこれらの近似分数の分母の中から選ばれることを示すことができる。
- (2) 上記の近似分数の分母をモードにとったとき, 概して高いモードほど複合共振器への共鳴の度合いはよい。しかし高いモードになると糸内での散逸が大きくなるというマイナス点があり, この両者の要因の拮抗によって発振モードが決まる。(3)に述べるような連分数展開の統計的性質を用いると, 発振モードのオーダーとして,  $\sqrt{\tau}$ という値がほぼ妥当であることを示すことができる。
- (3) 連分数展開から近似分数を得る操作をマッピングとしてとらえると, 指数関数的な拡大写

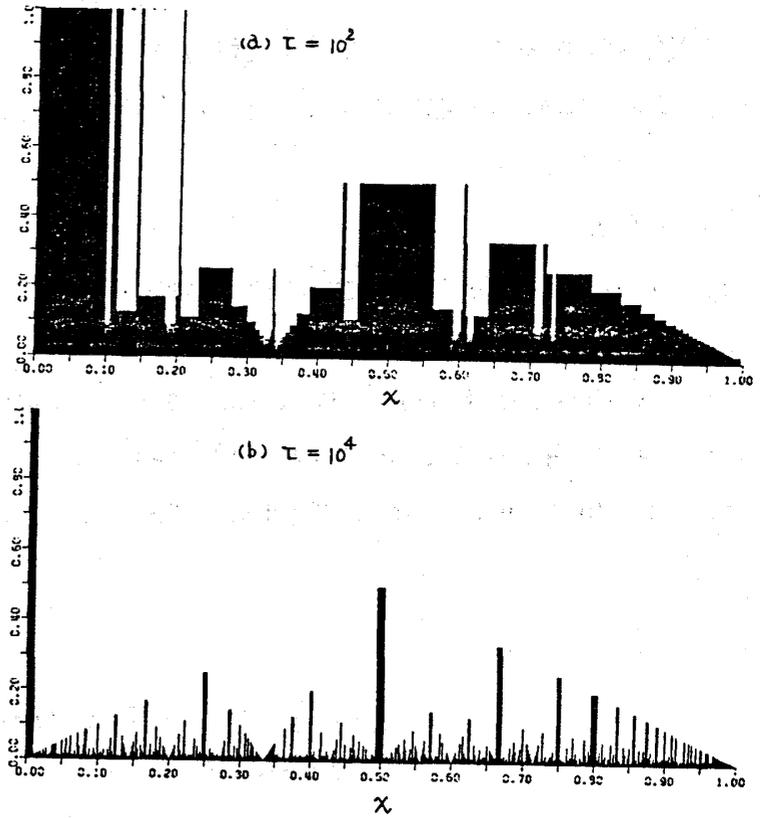


図2

セパトトリクス近傍のカオスのリヤプノフ数と拡散定数像になっている。よって、ほとんど至るところの  $\chi$  から出発した軌道は不安定である。  $\tau$  が大きな値のとき、発振モードを求めようとするとき、マッピングの回数を多くとらねばならないので、  $\chi$  の値がわずかに違っても、全く異なる値の発振モードが得られることになる。

(4) 図2にみられるセルフシミラリティは、連分数展開の階層性が反映されたものである。図において、低次の展開係数のみで表わせる有理数の近傍にある  $\chi$  に対する値が荒い骨組を構成している。多くの展開係数を必要とする有理数近傍の  $\chi$  に対する値ほど、細かい構造を表わすものに対応している。

### 参考文献

- 1) K. Ikeda, M. Mizuno, Phys. Rev. Lett. 53 (1984), 1340.
- 2) 高木貞治「初等整数論講義」

## セパトトリクス近傍のカオスのリヤプノフ数と拡散定数

静岡大・教養 長島弘幸  
 テキサス大・物理 T. Y. Petrosky  
 山口喜博

セパトトリクス近傍に生ずるカオスについて、リヤプノフ数を解析的に求め、Chirikovによって与えられた拡散定数  $D_{CH}^1$  との関係明らかにする。

考える系の運動方程式は

$$\ddot{x} = x - x^3 + g x \cos(\omega t + \beta_0) \tag{1}$$

である。ここで  $g$  は1よりも充分小さい数とする。系のポテンシャルは二重井戸型(図1)で  $V(x) = -x^2/2 + x^4/4$  である。

$g \neq 0$  の場合には、ホモクリニシティによりセパトトリクス近傍に、ストカスティック層という乱雑領域が形成される。 $g = 0$  の場合、セパトトリクス  $(x_0, p_0)$  は

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{2} \operatorname{sh}(t - t_0) \\ p_0 &= -\sqrt{2} \operatorname{sh}(t - t_0) \operatorname{th}(t - t_0) \end{aligned} \tag{2}$$