

戸田幹人, 池田研介
 われる。

参考文献

- 1) K. Husimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. 22 (1940) 264.
- 2) E. Prugovečki, Ann. Phys. 110 (1978) 102.
- 3) Y. Weissman and J. Jortner, J. Chem. Phys. 77 (1982) 1486.

Quantal Version of Global Stochastization Due to Overlap of Resonance

京大・理 戸田幹人, 池田研介

Chirikovによれば, 位相空間で2つの Resonanceが重なる時にカオスが生じる。これに対応する量子論で何が起こるかを次の Hamiltonian を用いて調べた。

$$\mathcal{H} = \frac{I^2}{2} + V \cos \theta + V \cos(\theta - \omega t) \quad I = i \frac{\partial}{\partial \theta}$$

プランク定数は ω と V に含まれてあり, 独立なパラメータとして以下 ω と S をとる。

$$\omega \propto \hbar^{-1} \quad V \propto \hbar^{-2} \quad S \equiv \frac{4\sqrt{V}}{\omega} \propto \hbar^0$$

ここで S は $I = 0$, ω にそれぞれある Resonance の接近の程度を表わすパラメータである。
 (Fig. 1)

\mathcal{H} は周期的であるから, 任意の波動関数の時間発展は次の形で表わされる。

$$\psi(0) = \sum_i a_i \varphi_i \longrightarrow \psi(nT) = \sum_i a_i e^{i\epsilon_i n} \varphi_i$$

ただし $\{e^{i\epsilon_i}\} \{\varphi_i\}$ はそれぞれ時間発展演算子 U の固有値・固有ベクトルである。

$$U \equiv T \exp \left\{ -i \int_0^T \mathcal{H}(t) dt \right\} \quad T = 2\pi/\omega$$

Fig. 2 (1.a)(1.b) に古典論での周期 T ごとのストロボ写像を示す。
 $S = 0.6$ では位相空間の大半はトーラスで占められているのに対し, $S = 1.2$ では2つの Resonance の間はカオスで埋められている。Fig. 2

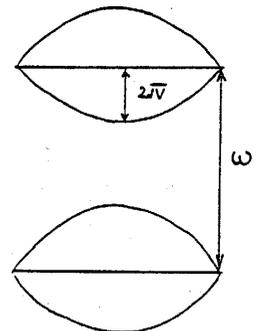


Fig. 1

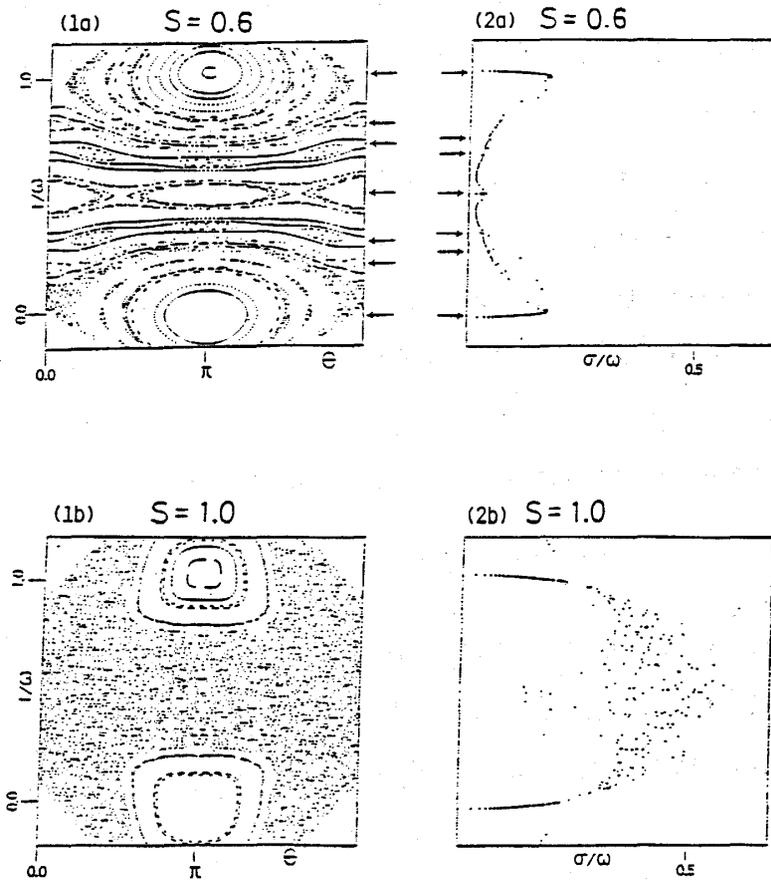


Fig. 2

(2. a)(2. b) では量子論で運動量演算子 I の平均と分散 $\sigma \equiv (\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ を個々の固有関数 φ_i について表わした。 $S = 0.6$ では点が一列をなして並び、これから良い量子数が存在することがわかる。分散 σ は 2つの Resonance の距離 ω に比べて小さく、 $\{\varphi_i\}$ が運動量空間で局在していることを示す。 $S = 1.0$ では点が不規則に 2次元に広がり、良い量子数が存在しないことを示す。 σ の値は固有関数が 2つの Resonance に広がっていることを示す。これらの結果から、古典論におけるトーラスの崩壊は量子論で良い量子数の消滅として良く反映すると言える。

固有関数の性質をさらに調べるため次の量を計算した。

$$C(i, j) \equiv \sum_k |\langle i | \varphi_k \rangle|^2 |\langle \varphi_k | j \rangle|^2$$

これは $|i\rangle$ から出発したとき、 $|j\rangle$ にある確率の長時間平均である。 $|j\rangle$ として運動量 I の固有状態を選び $|i\rangle$ として $I = 0$ の Resonance の separatrix に対応する量子状態を選んだ時の $C(i, j)$ を Fig. 3 に示す。 $C(i, j)$ は 2 段の階段状の形をしている。それぞれの段は $I = 0, \omega$ にある Resonance

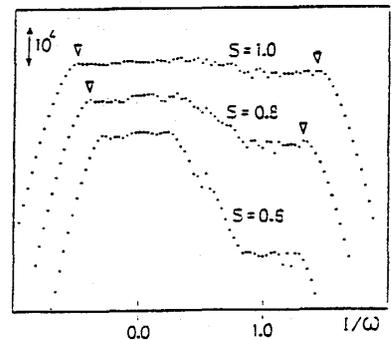


Fig. 3

の楕円軌道を I 空間に射影した形をしている。重要なのは落差の大きさである。 $S = 0.6$ では古典的には2つのResonanceの間にトーラスがあり, $I = 0$ のResonanceのseparatrixから出発した軌道は $I = \omega$ の付近に到ることはできない。従って量子論における $I = \omega$ 付近の確率は量子トンネルの寄与である。 $S = 0.8, 1.0$ では広がったカオスが存在し $I = 0$ のResonanceのseparatrixから出発した古典軌道はやがて $I = \omega$ の付近に到達し, 長時間平均をとれば位相空間におけるカオスの領域を一様に埋めつくし初期条件についての記憶を失なう。量子論では $I = 0$ 付近と $I = \omega$ 付近の間で落差が存在し初期条件についての記憶が残っていることがわかる。この落差は特に $S = 0.8$ で著しい。

古典論と量子論の差をさらに良く調べるために $I = \omega$ 付近で $C(i, j)$ を積分し

$$\bar{C}(i; \omega) \equiv \sum_{|\omega-j| < \Delta} C(i, j) \quad \Delta \sim \sqrt{V}$$

$\bar{C}(i; \omega)$ を初期態 $|i\rangle$ について図示したものが Fig. 4 である。ここで $|i\rangle$ は $I = 0$ のResonanceの固有状態である。古典的には初期条件をResonanceの内側からseparatrixに近づけてゆくとトーラスの存在するところでは $\bar{C}(i; \omega) = 0$ であり, 或る所で (図中で矢印), 位相空間のカオス領域に一様に広がった状態に相当する値となる。(図示で点線) 量子論ではトーラスのある所でもト

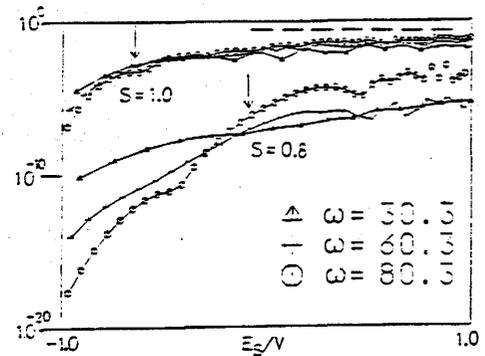


Fig. 4

ンネルによって $\bar{C}(i; \omega) > 0$ であるが, その値は古典性が強くなると (図では ω が大きくなると) 小さくなる。 $|i\rangle$ がカオス領域に入るとき量子論の値は古典論の値よりはるかに小さく, 特に $S = 0.8$ の場合には初期条件 $|i\rangle$ あるいは古典性の強弱 ω により変化が激しい。

以上のことから次の結論が導ける。古典論でトーラスからカオスへの変化に対応し量子論では固有関数はトーラスに対応するものからカオスに対応するより広がった状態となり, 良い量子数が定義できなくなる。しかしカオスに対応する量子状態は, 古典論におけるカオス軌道のように初期条件の記憶を失なうほど十分には乱雑ではない。