

ある高次元アトラクターのリアプノフ特性に依存し、スペクトル構造の詳細は普遍的性質とはなり得ない。しかし、スペクトル構造の包絡線は、上記のように、 ϵ に依らない逆ベキ則に従い、その指数は、間欠的カオスの普遍性を定量的に代表するものといえる。なお、指数の値3, 2, 1は、異なるラミナー状態間の相関を無視して得られたもので、RPA近似または平均場近似の値に相当するものと考えられる。

ある高次元アトラクターのリアプノフ特性

京大・理 物理 池田研介, 松本健司

§ 1. 研究の目的と方法

無限自由度の系でみられる chaos を研究する。chaos の原因である双曲的不安定性に象徴される力学的な機構が、時系列の比較的単純な統計処理によってえられる諸特性（フーリエ特性、フィルター特性等々）にどのような形で顔を出すか？ 乱流のイメージとしてよく引合いに出されるカスケード過程と系の力学的構造がどう結びついているか？ 具体例による case study によって普遍的と思われそうな性質を抽出しその内的関連をさぐる。我々の用いるモデルは毎度おなじみの遅延微分方程式

$$dx(t)/dt = -x(t) + \mu f(x(t-t_R)) \dots\dots\dots (1)$$

ここでは $f(x) = \cos x$ である。この方程式は双曲型の方程式（例 Maxwell 方程式）がからむ系、例えばレーザーや非線形光共振器のモデルである。 μ （=入力エネルギー/散逸：レイノルズ数のごときもの）と t_R （ちえん時間：系のサイズに関係）のてきとうな選択によって質を異にする様々なカオス状態がくれ、しかも数値積分が安価で我々の目的にかなっている。

§ 2. リアプノフスペクトル, リアプノフ基底, フーリエ基底

(1) はベクトル $\vec{x} = \{x(t)\} (t_0 \leq t \leq t_0 + t_R)$ から $\vec{x}' = \{x(t)\} (t_0 + t_R \leq t < t_0 + 2t_R)$ への写像を定義する。解 $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \dots$ を考え \vec{x}_1 まわりの微小球 ${}^t\delta\vec{x}_1 \delta\vec{x}_1 = 1$ の時間発展を追う。それはだ円体 ${}^t\delta\vec{x}_n A_n^{-1} \delta\vec{x}_n$ に変化する。だ円主軸長の平均増幅率 $\lambda_i (\lambda_{i+1} > \lambda_i)$ がリアプノフ指数、主軸方向の単位ベクトル $\vec{e}_i(\vec{x}_n)$ がリアプノフベクトル。アトラクターは \vec{x}_n の近傍で軸長 e^{λ_i} のだ円（リアプノフだ円体）の様に局所的に伸び（縮んで）いる訳である。 λ_i を大きい順に並べた所謂リアプノフスペクトルを図1に示す。面積 $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ がゼロになる様な n 次元の中

池田研介, 松本健司

でアトラクタを見るとその体積成長率 $\exp \sum_{i=1}^n \lambda_i$ は1になり不変。そこで n をアトラクターの次元 D_A と呼ぶ。下の例では $D_A = 68$ 。 D_A は μ 又は t_R (境界条件) と共に増大する。 t_R の増大に対しリアプノフスペクトルは (当然のことながら) スケール性をもつが μ に対してはそうではない。リアプノフ基底は系の力学的な不安定 (安定) 方向を指定する “力学的” 座標である。これに対置して, 系が安定な時の線形モードに近いという意味で “自然な” 座標系としてフーリエ基底 $\vec{f}_k = \{e^{ikt}\}$ ($0 \leq t \leq t_R$ $k = 2n\pi/t_R$) を導入しよう。

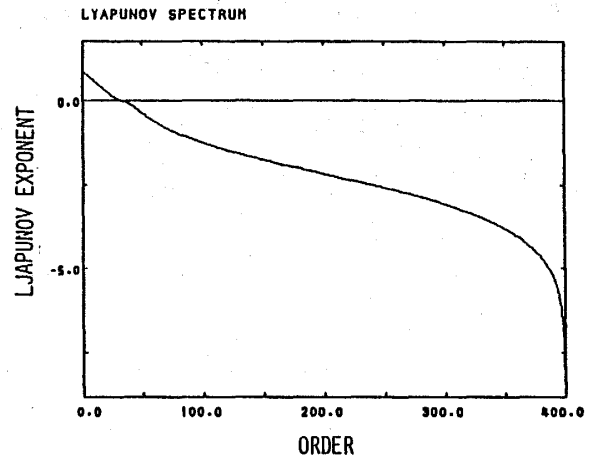


図 1

ところがこの2つの基底, リアプノフ基底とフーリエ基底は密接に関係する。即ち

“リアプノフ基底とフーリエ基底は統計的な意味で1対1に対応す。”

$e_i(\vec{x})$ は \vec{x} に依存する。今, ノルム $\langle |\vec{e}_i(\vec{x}) - \vec{f}_k| \rangle_{\vec{x} \in A}$ (A はアトラクタ) を最小にする k は $k=i$ なのである。更に

“フーリエ基底を出発点にとると, リアプノフスペクトルの収束が極めて速い。”

Schmidtの直交化法によってリアプノフ指数をもとめる際に, iterationの starting basisとしてフーリエ基底を用いると, わずか1回の演算操作で全リアプノフスペクトルの概形がもたまってしまう。この意味でフーリエ基底はリアプノフ基底に近い。しかしリアプノフベクトルは局在性 (in time) が強く, この意味でフーリエ基底に相補的である。

§ 3. リアプノフスペクトルとリアプノフ成分そしてフーリエ成分。

リアプノフ基底に沿ってアトラクターのサイズを測ると, それはどの様に見えるだろうか? 射影 $\langle |\vec{e}_i(\vec{y}) \cdot (\vec{x} - \langle \vec{x} \rangle)| \rangle_{\vec{x} \in A}$ の平均, つまりアトラクターの i 方向の長さを $l_i(\vec{y})$ とかく。それは不思議なことに \vec{y} 依存性を強く示さない。即ちアトラクター上の任意の点上のリアプノフ基底からみて, アトラクターの形状はみな同じ様にみえるのである。 $l_i(\vec{y})$ をリアプノフ成分と呼ぼう。リアプノフ基底でみたアトラクターの概形は, リアプノフスペクトルと極めて深い関係をもつ。

“アトラクターのグローバルな形状は対数尺度でリアプノフだ円体に相似である。”

より厳密には $l_i \equiv \langle l_i(\vec{y}) \rangle_{\vec{y} \in A}$ に対して, アトラクター内外で異った2つの exponent $\alpha < \alpha'$ が存在して

$$l_i \propto \begin{cases} (\exp \lambda_i)^\alpha & i \ll D_A \\ (\exp \lambda_i)^{\alpha'} & i \gg D_A \end{cases}$$

1例を図2に示した。以上のことから

フーリエ基底でみたアトラクター

————→ フーリエベクトル

リアプノフ基底でみたアトラクター

————→ リアプノフベクトル

といううまいゴロ合わせが成り立つ。前者が定義であるのに対し後者は広い範囲での

シミュレーションの結果である。このことはリアプノフ基底が系の力学的ゆらぎを観測する上で極めて有用であることを示唆する。

さて、それではリアプノフ成分はフーリエ成分とどの様にして関係しているのだろうか？ それについては次の事がわかっている。

$$l_i^2 \cong \sum_k P_k(i) C_k^2$$

ここに C_k はフーリエ成分, $P_k(i)$ は $\langle (\vec{e}_i(\vec{y}) \cdot \vec{f}_k)^2 \rangle_{\vec{y} \in A}$

ゆえ $P_R(i) C_R^2 \equiv C(i, k)$ を第 k フーリエ成分の第 i リアプノフ成分への寄与と呼ぶ。 $C(i, k)$ は (i, k) 平面上で図3に示す様な挙動を示す。

ここに i_D 及び k_D は大体次元 D_A と一致する。従って i がアトラクター内部 ($i \ll i_D$) から外に向って増えると共にそれに寄与するフーリエモード数も増加するがアトラクター外部に出ると、もはやその数は飽和し $k \leq k_D$ なる“内部フーリエモード”のみによってアトラクター外のゆらぎがつけられる訳である。逆に関係しても同様な関係が存在しているだろう(もう少し複雑らしい)。とするならば次節に示す様に、フーリエ成分がアトラクターの“内”と“外”で質的に異なる振舞いを示しても何ら不思議ではない。

§ 4. 時系列のフーリエ処理によって見えるアトラクターの内と外

mutual information — 初期の情報が時間経過後も残留している度合を測るためには mutual information が最適である。フーリエ成分 $C_k^{(n)} = \vec{f}_k \cdot \vec{X}_n$ の mutual information を step

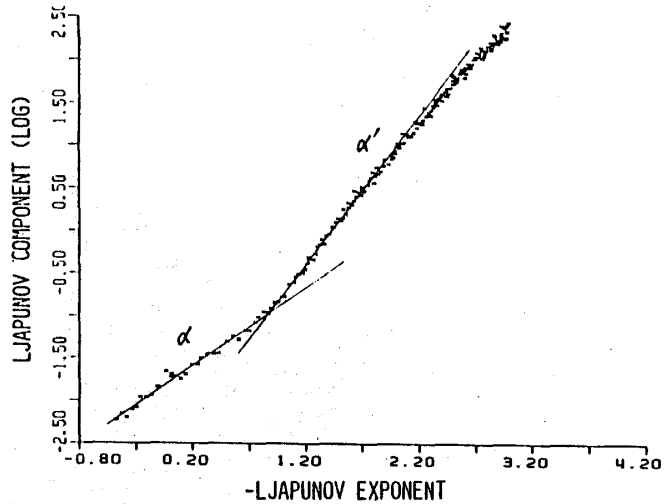


図 2

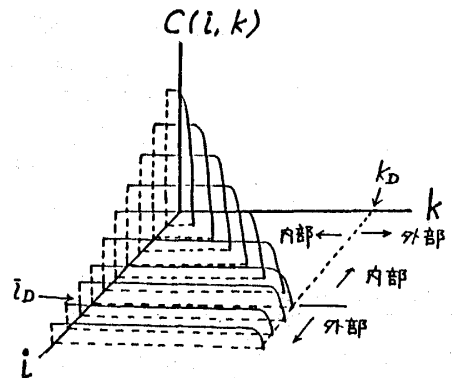


図 3

池田研介, 松本健司

の関数として表示した(図4(a))。すぐ減衰する長波長成分と尾をひいて減衰する短波長成分が区別できる。この境界がほぼアトラクターの次元に一致することが広いパラメータ領域で確かめられている。

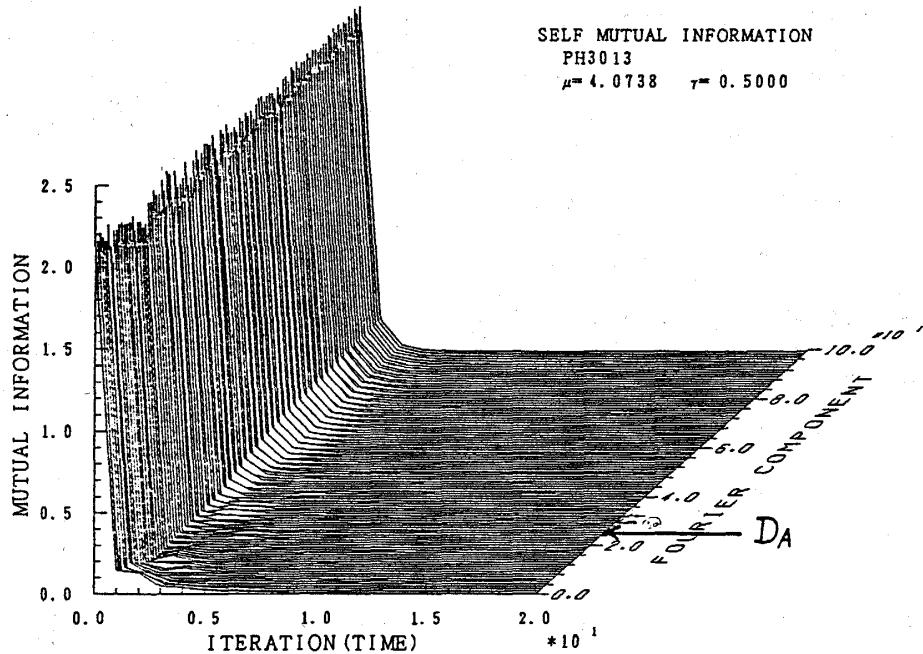


図4(a)

hipassfiltered time-series—与えられた波数 k 以下のフーリエ成分をフーリエ逆変換してえられた time series $x(k, t)$ も, アトラクターの内外を見るためには有用である。 $x(k, t)$ の活性領域が示すパターンを (k, t) 空間の中に示したのが図4(b)である。パターンに強い連結性が存在する短波長領域(これはバーストである。)と, パターンの消長がデタラメな長波長領域に分かたれることがわかる。この区分点があトラクターの次元と一致するか否かは目下検討中である。

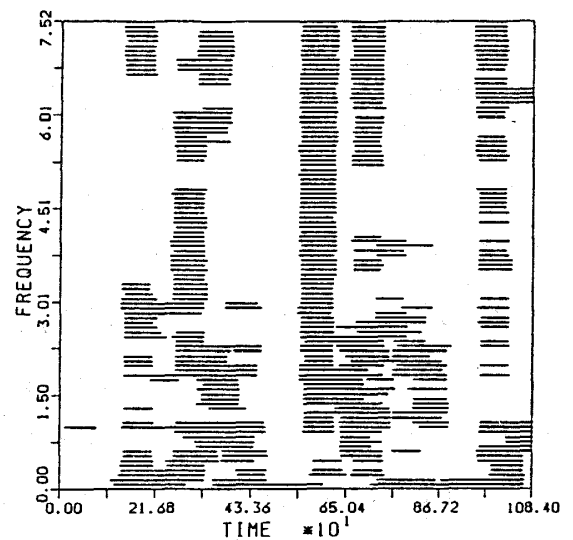


図4(b)

この様にアトラクターの内外は, 割合かんたんな時系列処理からえられた諸量に顔を出すことがわかってきた。一部の人が言うように決してアトラクターの次元は空疎な概念ではないように思われる。