

自由度の大きいカオスへのアプローチ

東北大通研 佐藤信一, 佐野雅己, 沢田康次

1. はじめに

流体運動は Navier-Stokes 方程式で記述される無限自由度系であるが, 粘性流体の場合散逸のために有限自由度のアトラクタに吸引されると考えられている。例えば, 2枚の平行平板間中の流体を下から熱した Bénard 対流のアスペクト比(系の水平方向の長さとの厚さの比)の充分小さい系の乱流の発生は少数自由度の力学系で記述し得ることが知られている¹⁾ところが, アスペクト比の大きい系になると大分事情は異なり空間的コヒーレント性の破れなどが予想され, 乱流の時間変化のみならず空間構造にも着目すべきであると思われる。そこで, 我々は空間自由度の大きい Bénard 対流系のカオスに対して次元測定等の手法を用いて乱流の時空間構造への実験的アプローチを試みた。

2. 実験系

実験方法は矩形型流体容器の左端からの距離 r とパラメータとして各点の温度勾配の時間変化を測定する。容器左端を原点に, 垂直方向を z , 水平方向を x, y とする直交座標系を取り容器の寸法をそれぞれ $l_x (= 150 \text{ mm})$, $l_y (= 10 \text{ mm})$, $l_z (= 10 \text{ mm})$ とし, そのアスペクト比は

$$\Gamma_x = l_x/l_z = 15.0 \quad \Gamma_y = l_y/l_z = 1.0 \quad (1)$$

である。温度勾配の測定は図1に示すように流体中にレーザー・ビームを通すと温度勾配によりビームが屈折することを利用したレーザー・ビーム屈折法を用いる。作業流体は水でありその Prandtl 数は約 6.9, 対流発生時の臨界 Rayleigh 数は $R_c = 1708$ とした。

3. 乱流への遷移

定常対流から Rayleigh 数 R を増加させてゆくと実験系は順次 Hopf 分岐を起こし周期運動, 準周期運動あるいは Phase locking 状態へと遷移し $R/R_c \sim 33$ で非周期運動になる。その様子を温度勾配の

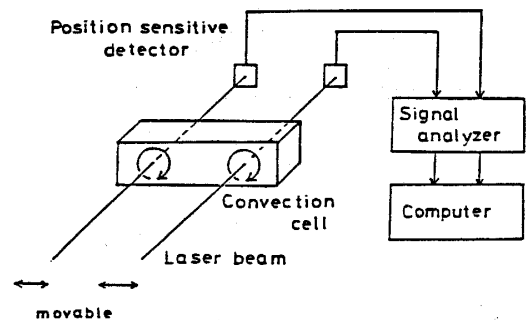


図1

時間変化のパワー・スペクトルの鋭いピークを持つ周波数成分に着目して調べる。図2(a)は周期振動の測定結果で、そのパワーの r による変化を示したものである。図2(b)は準周期振動のもので2つの周波数の線形結合に対応する複数個のピークの内、特にパワーの大きい周波数を図示した。図2(c)は非周期振動状態で各ピークは広がりを持ちノイズ成分が増大してくる。振動成分の空間分布は、振幅あるいはパワーが容器の一端で大きく他端に向うに従い小さくなるもの (type A) と、容器の両端で小さく中央で大きいもの (type B) に分けられる。乱流の発達に従い type B のモードが増大する傾向にある。また、2点時間相互相関々数によ

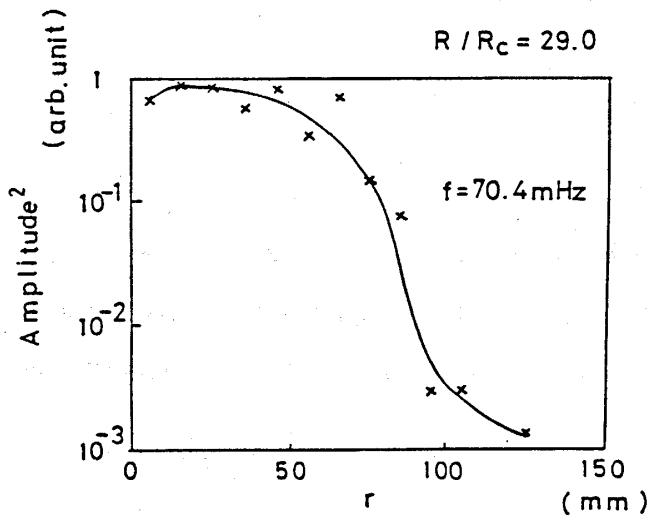


図2(a)

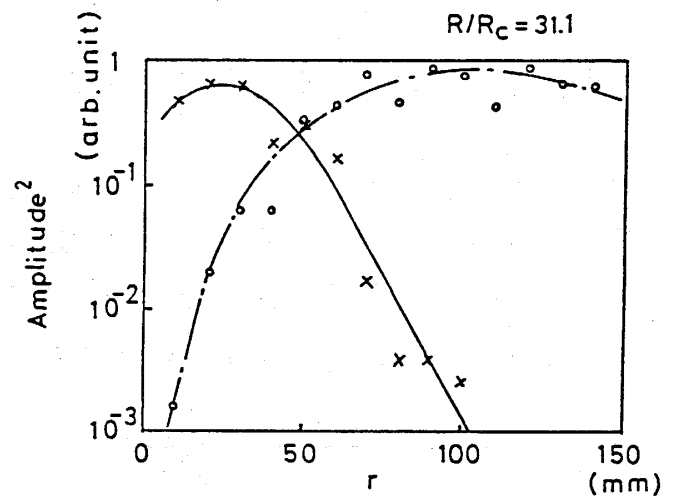


図2(b)

り系の空間相関を調べると準周期状態ですでに空間的コヒーレント性が破れていることがわかる。2点時間相互相関々数は各測定信号を $X_1(t)$, $X_2(t)$ として

$$C_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t) X_2(t+\tau) dt \quad (2)$$

である。2点 X_1 , X_2 の距離を Δr として相関の強さを

$$C_{\Delta r} = \max_{\tau} \{ |C_{12}(\tau) / \sqrt{C_1(0)C_2(0)}| \} \quad (3)$$

を定義する。ただし $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ は自己相関々数である。図3は $R/R_c = 31.0$ における $C_{\Delta r}$ と Δr の関係を示したもので測定点 X_1 は $r = 30\text{mm}$ の位置に固定した。容器両端の振動のパワーが異なる周波数に集中していることがわかる。

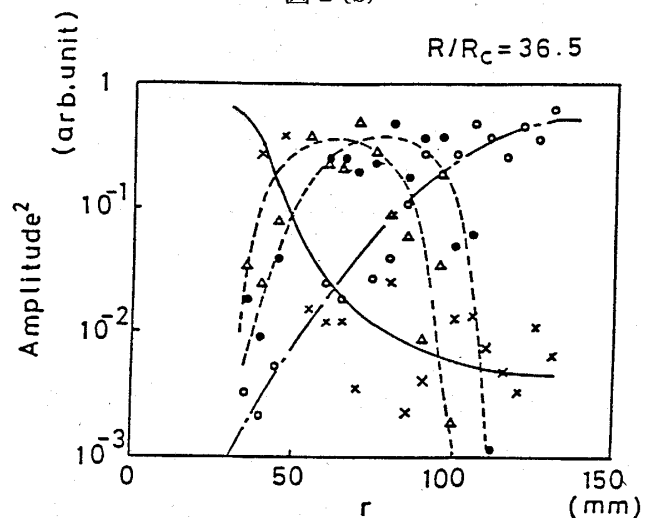


図2(c)

4. アトラクタの次元

アトラクタの次元を Grassberger, Procaccia による Integral correlation 関数によって評価する^{2),3)} その方法は一定時間々隔でサンプリングした時系列 $\{X_i\}_{i=1, 2, 3, \dots}$ から d 次元ベクトル $\vec{X}_i = (X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+d-1})$ を構成し, Integral correlation 関数を

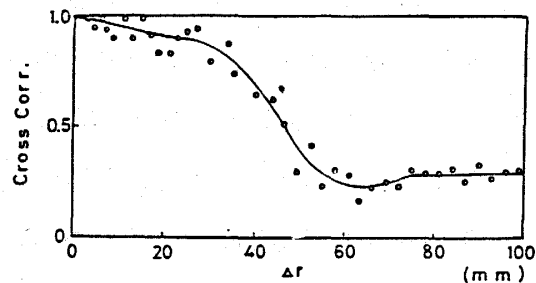


図 3

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \{ \text{number of pairs } (n, m) \text{ with } |\vec{X}_n - \vec{X}_m| < \epsilon \} \quad (4)$$

とする。 d を十分大きく取ったとき漸近的に

$$C(\epsilon) \sim \epsilon^\nu \quad (5)$$

であり, ν によりアトラクタのフラクタル次元 D を評価できる。(i.e. $\nu \lesssim D$) 図 4(a), (b) に $R/R_c = 32.0$ における埋め込み次元 d を変化させたときの Integral correlation 関数の例を示す。(a) は $r = 30 \text{ mm}$ で $d = 3, 7, 15, 30$ である。(b) は $r = 70 \text{ mm}$ で $d = 3, 7, 20, 30, 80$ である。

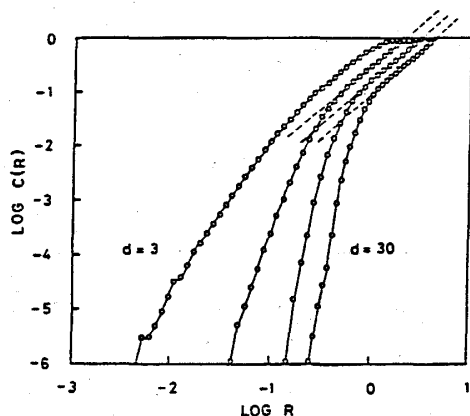


図 4(a)

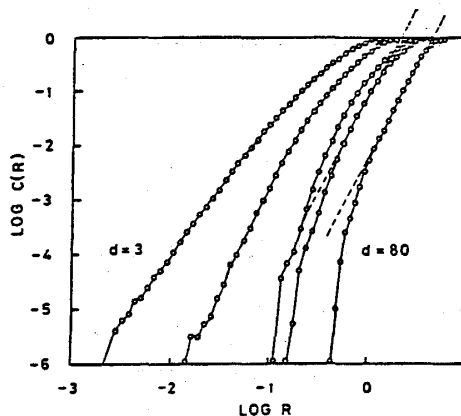


図 4(b)

(a) ではあるスケールでフラクタル構造の変化あるいは破壊が認められ, (b) では比較的小さいスケールまでフラクタル構造をなしていることがわかる。ここでは ν をフラクタル次元 D と見做して各 r に対する D を図 5 に示す。大別すれば容器両端の $D \sim 1.5$ の領域で図 4(a) 型, 中央で図 4(b) 型の関数形である。今回の実験で用いた空間自由度の大きい系でもカオス発生点近傍において各点で有限次元のアトラクタを持つが, 空間の位置の相違により D もかなり変化することがわかる。

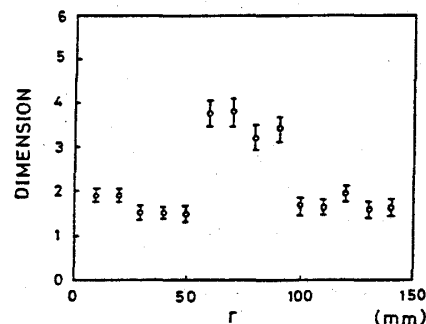


図 5

アトラクタの次元はアトラクタの「奇妙さ」の尺度として有用と言えるが図4(a)のように必ずしも少数自由度力学系の場合のような純粋なフラクタル構造とは限らない。このようなアトラクタの複雑な構造がまさに空間自由度に起因するものであるか、ノイズ等の他の原因によるものか今後物理的解釈が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) for example
 J. P. Gollub, S. V. Benson and J. Steinman, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **357** (1980) 22.
 A. Libchaber and J. Maurer, *J. de Phys.* **41** (1980) C3-51.
 M. Giglio, S. Musazzi and U. Perini, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 243.
 M. Sano and Y. Sawada, "*Chaos and Statistical Methods*" ed. by Y. Kuramoto (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984), P. 226.
- 2) P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 346.
- 3) P. Grassberger and I. Procaccia, *Physica* **9D** (1983) 189.

ベナール対流における乱流発生の経路

広島大・理 八 幡 英 雄

2枚の水平な平行平板間に閉じこめられた流体を下から加熱した時発生する対流運動は、Rayleigh数 R ・Prandtl数 σ ・容器の縦横比・初期設定などの外部条件に応じて、時間的に定常的・周期的・非周期的な挙動を示す。特に容器の縦横比が小さい場合、 R の徐々の増加に伴う対流の乱流への遷移は、有限自由度力学系の示す分岐列によって説明されることが知られている。ここでは、対流を記述する偏微分方程式系から Galyorkin法によって有限変数常微分方程式のモデルを導びき、これによってどの程度乱流遷移の分岐列が記述できるかを考察する。

流体は間隔 d の平行平板間に閉じこめられているものとし、座標軸は水平方向 x, y , 垂直方向向上向きに z 軸をとる。熱拡散率を κ , 熱膨脹率を α , 重力定数を g , 水平平板間の温度差を T_d とする。さらに $\rho_0 \cdot T_0$ を底の平板境界 ($z = -d/2$) における密度・温度とする。体系を記述する基礎方程式は、流体の速度 u_i ($i = x, y, z$), 温度 $\theta = T - T_0 + (T_d/d)(z + d/2)$, 圧力 δp に対して次の形をとる (ただし $\underline{\lambda} = (0, 0, 1)$):