13. 成長するパターンの統計力学

東北大・工　近　藤　　宏
東北大・通研　沢　田　康　次

ランダムに成長するパターンがフラクタル構造を示す場合が多いことが最近知られた。このパターンを特徴づける量としてフラクタル次元 D がよく用いられる。例えば DLA では $D=(d^2+1)/(d+1)$ に近いことが計算機シミュレーション[(1)]や実験[(2)]によってみとめられているが，まだ完全に納得のいく理論[(3)]が完成されているとは云えない。フラクタル次元はパターン全体を反映する量であって局所的な成長のプロセスに鈍感であり，パターンのダイナミックスを研究する上で良い量とは云えない。それよりも，表面が体積の増加と共にどう変るかを表す指数 $D_{ks}=d\times\partial(\log S)/\partial(\log V)$ の重要性を我々は指摘して来た。[(4)] 我々の提案したHOT－TIP－MODEL[(5)]は非平衡性の強さを示すパラメーター R を含んでいて，この値と共に D_{ks} が1図のように変化することを報告して来た。[(4)]

このようなモンテカルロの結果をどのように理解したら良いかを統計力学的手法を用いて解明したいと思っている。この報告書では半経験的な証明を与えることになる。

1) HOT－TIP－MODEL は伸びる先端は側面に比して R 倍だけ更に伸びる確率を持つ。詳細は文献(4)を参照。

2) 表面にあるサイトの種類は，表面増加と云う観点からは，4角格子の場合，4種類しかない。そのサイトが選ばれた場合に表面の増加は $\Delta S=2, 0, -2, -4,$ である。そのサイト数を $N_{i\sigma}$ とする。σ は↑の場合 R 倍の確率を持ち↓の場合は1倍の確率を持つ。

3) 数値計算の結果より $N_{i\sigma}$ の比率は既知の量とする。 R に依存するが V にはあまり依存しない。

4) この $N_{i\sigma}$ の中から ΔV を選ぶ時に，指定する ΔS だけ S が増大する確率は，

$$P(\Delta S)=\sum_{\{n_{i\sigma}\}}(\Delta V)\,!\prod_{i\sigma}{}_{N_{i\sigma}}C_{n_{i\sigma}}\,P_\sigma^{\,n_{i\sigma}}$$

$$\text{但し }\{n_{i\sigma}\}\text{ は}\begin{cases}\displaystyle\sum_{i\sigma} n_{i\sigma}=\Delta V\\[2ex]\displaystyle\sum_{i\sigma}\varepsilon_i\, n_{i\sigma}=\Delta S\end{cases}$$

をみたす $n_{i\sigma}$ の組である。もし分布が鋭ければ Σ をとらなくともその最大値を与える

$\{ n^{*}_{i\sigma} \}$ の組でこの確率を代表させても誤差は少い。この仮定にたって $P(\varDelta S)$ の $\sum$ を除いた部分を上記二つの束縛条件の下で最大にする $\{ n^{+}_{i\sigma} \}$ を求めると，

$$n^{*}_{i\sigma} = \frac{N_{i\sigma}}{1+\dfrac{1}{P_\sigma}\exp(\alpha+\beta\varepsilon_i)}$$

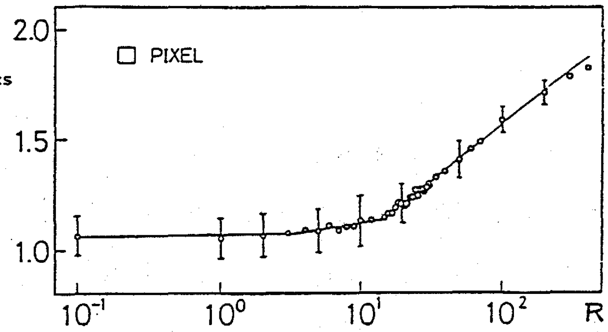

図1　先端優先率と R と D_{ks}

のフェルミ関数となる。但し α，β は定数で $R \equiv P_{\uparrow} / P_{\downarrow}$ に依存する。

5) この $n^{*}_{i\sigma}$ を $P(\varDelta S)$ の $\sum$ を除いた部分に代入した場合の $P(\varDelta S)$ を $P^{*}(\varDelta S)$ と書くことにし，$R=1$ と10の場合を求めたものが2図であって，モンテカルロの D_{ks} と全然合わない。

6) 次に，フェルミ関数を用いないで計算機によって $P(\varDelta S)$ を直接計算した結果を3図に示す。これはかなり良い結果を示していることが判る。

モンテカルロの結果と比べたのを4図に示す。

7) この結果パターンの分布関数は大数の法則から大きくずれている事を示し，この方面で以前から感にくれていたことを再確認することになった。又 $P(\varDelta S)$ と $P^{*}(\varDelta S)$ のずれは最大確率部分からの巾を解析的に求める事により　解が深まると見る。

8) 組合せ最大になる次元 D_{ks}^{*} が実現している事は明らかであるから，DLA のように拡散によって制限されるのでなく，局所的に成長条件が界面だけで決る

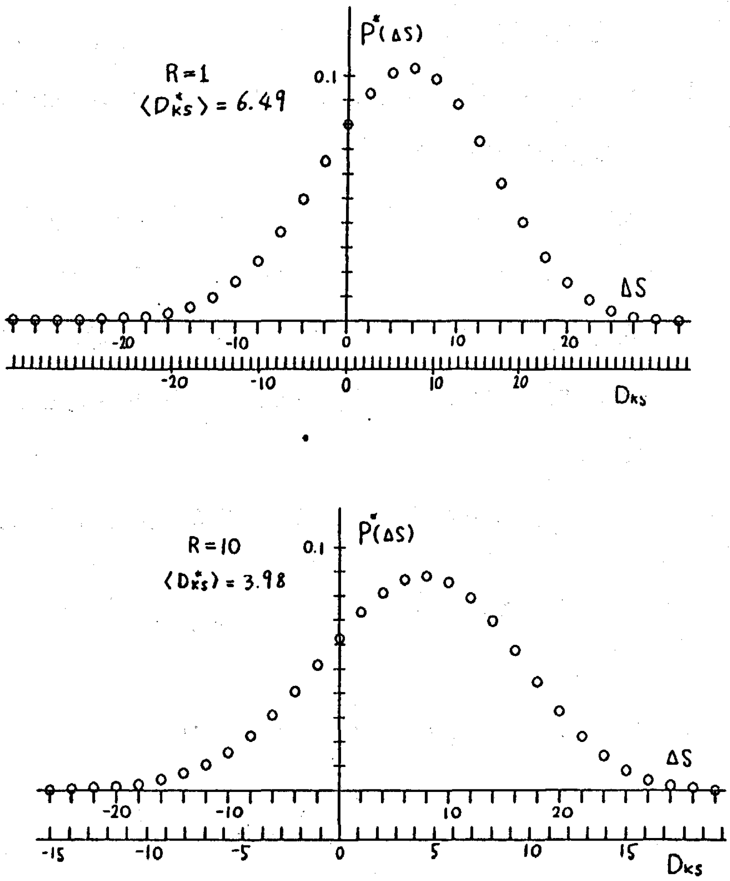

図2　最大確率 $P^{*}(\varDelta S)$ の $\varDelta S$ 依存性 $R=1$ 及び $R=10$

と考えて良い放電のような場合や，拡散距離の短い結晶成長の場合等には，実現するパターンは，他のパターンに比して成長速度が速い。逆に云うと拡散距離が短い場合は成長パターンの安定性は，その成長速度によってきまると解釈出来る。

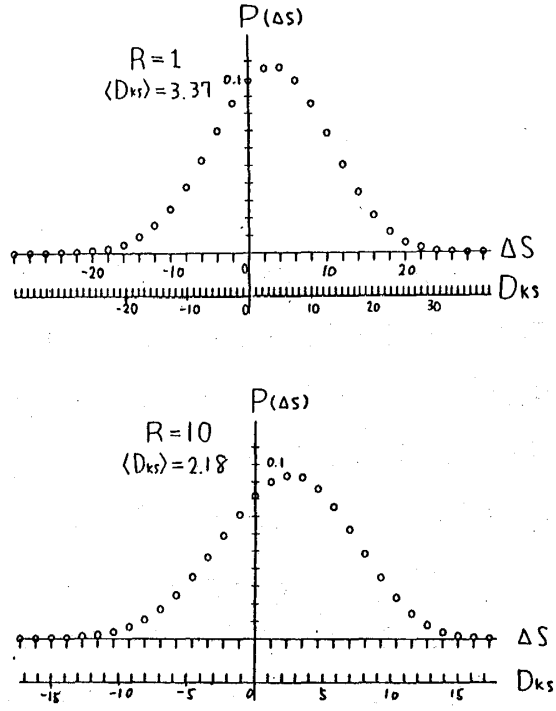

図3　計算機による $P(\Delta S)$ の直接結果

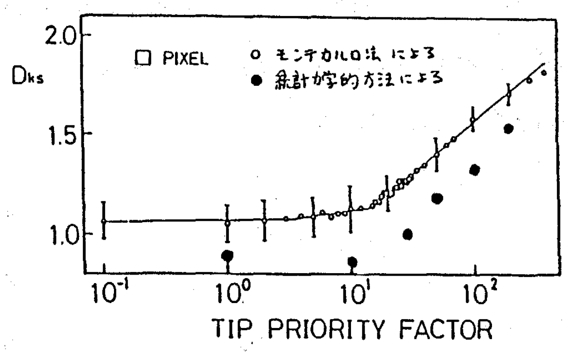

図4　モンテカルロ法による D_{ks} と
図3のピークより求めた D_{ks}

参考文献

1) T. Witten, L. M. Sander; Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1400
2) M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo, Y. Sawada; Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 286
3) M. Muthukumar; Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 839
4) Y. Sawada, M. Matsushita, M. Yamazaki, H. Kondo; Physica, Scripta (to appear 1984)
5) Y. Sawada, S. Ohta, M. Yamazaki, H. Honjo; Phys. Rev. **A26** (1982) 3557