Title	K-dV方程式の一般的座標変換(classical solitons II.,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告)
Author(s)	伊藤, 雅明
Citation	物性研究 (1985), 45(1): 65-67
Issue Date	1985-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91805
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

reduces to

$$1 - (3A^2b^2/2Km)G(0;\omega)=0 \quad \text{or} \quad \epsilon=(B^2y^2+1)^{1/2}-1. \qquad (3.11)$$

Inserting the numerical values obtained above to this, we get $\epsilon=2.9$ for $J=3\ cm^{-1}$ and 2.0 for $J=4\ cm^{-1}$. The binding energy $E_B=\hbar(\omega_1-\omega)$ of solitons, which corresponds to a red-shift frequency of amide I absorption line in ACN, is $E_B=17.4\ cm^{-1}$ for $J=3\ cm^{-1}$ and $16.0\ cm^{-1}$ for $J=4\ cm^{-1}$. The quantity $\{1+\epsilon+[(1+\epsilon)^2-1]^{1/2}\}^{-1}$, which is a measure of the localization of the vibron solitons, is 0.13 and 0.17 for these two values of J. This implies that our first order approximation is actually a good approximation, and we do not need to proceed any more. The soliton binding energy so obtained is good agreement with the experimental result obtained by Careri et al.[1] Here we have not yet specified optical phonons with which the amide I vibration in ACN couples. These may be phonon modes involving proton motion. It is seen from Eq.(3.4) that a local strain field or coherent phonon field is accompanied with stationary vibron solitons.

REFERENCES

[1] Careri, G., Buontempo, U., Galluzzi, F., Scott, A.C., Gratton, E., and Schyamsunder E., Phys. Rev. B30(1984) 4689; Eilbeck, J.C., Lomdahl, P.S., and Scott, A.C., Phys. Rev. B30(1984) 4703.

[2] Davydov, A.S., Biology and Quantum Mechamics (Pergamon Press, New York, 1982), Chap. VII.

K－dV方程式の一般的座標変換

広大・工　伊　藤　雅　明

ソリトン方程式と呼ばれる方程式の中には適当な変換によって結びつけられるものがある．その一例として，Konno-Ichikawa-Wadati方程式[1]

$$\theta_\tau+\cos^2\theta\,(\sin\theta)_{\xi\xi\xi}=0 \qquad (1)$$

は，Ishimori[2]によって見付けられた変換

$$\begin{cases} \xi=\int^x \cos\theta\,\mathrm{d}x \\ \tau=t \end{cases} \qquad (2)$$

によって次のようなmodified K-dV方程式

$$\theta_t+\frac{1}{2}\theta_x^3+\theta_{xxx}=0 \qquad (3)$$

と結び付けられている．

ここでは，(2)式と同じように従属変数による変換

$$\begin{cases} \xi = \int^{x} f(u)\,\mathrm{d}x \\ \tau = t \end{cases} \tag{4}$$

をK-dV方程式

$$u_t = 6uu_x + u_{3x} \tag{5}$$

に施したとき，元の方程式が持っている性質（無限個のSymmetry，保存量， Lax pair等）が保存されるかを調べる．

(4)式中の$f(u)$としてK-dV方程式(5)の保存密度であるu及びu^2を考えると，変換された方程式も次のような微分多項式で表わされる．

$$u_\tau = u^3 u_{\xi\xi} + 3u^2 u_\xi u_{2\xi} + 3u^2 u_\xi \qquad (f(u) = u) \tag{6}$$

$$u_\tau = u^6 u_{3\xi} + 6u^5 u_\xi u_{2\xi} + 3u^4 u_\xi^3 + 2u^3 u_\xi \qquad (f(u) = u^2) \tag{7}$$

ここでは，この２例について上記の性質を調べることにする．結果は２例とも同様であるので$f(u) = u$の場合のみについて示す．

（Ⅰ） Symmetry

K-dV方程式には無限個のsymmetryを生成するrecursion operator

$$\mathscr{D} = D^2 + 4u + 2u_x D^{-1} \tag{8}$$

が見付けられているが，(6)式に対しても次のようなrecursion operator

$$\begin{aligned} \overline{\mathscr{D}} = {} & u^2 \overline{D}^2 + uu_\xi \overline{D} + 4u + 2uu_\xi - u_\xi \overline{D}^{-1} \\ & + (u^3 u_{3\xi} + 3u^2 u_\xi u_{2\xi} + 3u^2 u_\xi)\,\overline{D}^{-1} \frac{1}{u^2} \end{aligned} \tag{9}$$

が存在することが分った．ここでD及び$\overline{D}$はそれぞれx及びξに関する全微分である．しかし(9)式は(8)式に単に(4)式の変換を施しただけでは得られない．

（Ⅱ） Lax pair

変換されたK-dV方程式(6)に対して次のようなLax pairが存在する，

$$\begin{cases} L_1\varphi = \lambda\varphi & (10) \\ \varphi_\tau = L_2\varphi & (11) \end{cases}$$

ただし

$$\begin{cases} L_1 = u^2\partial_\xi^2 + uu_\xi\partial_\xi + u & (12) \\ L_2 = -(u^2 + uu_\xi^2 + u^2u_{2\xi} - 4\lambda u)\partial_\xi - uu_\xi & (13) \end{cases}$$

ここで

$$\varphi = \exp\{\int^\xi (\frac{k}{u} + \chi(u, k))d\xi'\} \tag{14}$$

$$\lambda = k^2$$

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} k^{-i}\chi_i$$

と置くと，(10)式より k の各巾に応じて保存密度が得られ，無限個の保存量の存在が言える．

しかし，Hamiltonian形式，Lax pair の擬微分作用素による表現，Lex pair とrecursion operatorとの関係については未解決である．

文献

1) K. Konno, Y. Ichikawa and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 1025.
2) Y. Ishimori, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2471.

2次元非線型波動系のトポロジカルな渦のダイナミクス

京大・工　石　森　勇　次

トポロジカルな欠陥を許す非線型波動系が積分可能か否かは，その欠陥のダイナミクスと深くかかわっている．例えば1次元sine-Gordon方程式は積分可能系として知られているが，欠陥として現われるソリトンは互いの衝突によってもその個性が失われず，系の作用角変数としての役割りをはたす．一方非可積分系である1次元 ϕ^4 方程式のソリトンは，そのような性質を持たない．一般に欠陥の種類は，系を記述する秩序パラメータの成分の数 n と空間の次元 d