

ϕ^4 -Kink の Einstein Relation ~ 揺動散逸定理より ~

東大・理 小形正男, 和田 靖

Krumhansl と Schrieffer の ϕ^4 系の統計力学以来, キンク (又はソリトン) の統計力学上の役割が明らかになってきた.¹⁾しかし, その動的な振舞いについては, 未だわかっていない面が多い. 低温ではキンクを自由粒子として扱う理想気体模型が提唱されている. しかし温度が高くなるにつれて, 他の励起との相互作用の効果が顕著になる. 特に熱励起されたフォノンとの衝突を考慮すると, キンクは自由運動せずに, ブラウン運動をすることがわかってきた. このブラウン運動には2つの機構が存在しているが, 両者の間にどのような関係があるか今までわかっていなかった. この関係をキンクに対する揺動散逸定理を調べることによって明らかにしようというのが今回の目的である.

キンクのブラウン運動における2つの機構 ϕ^4 系のハミルトニアンとキンク解を

$$H = A \int \frac{dx}{l} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{l_0^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4} \phi^2 + \frac{\omega_0^2}{8\phi_0^2} \phi^4 \right], \quad (1)$$

$$\phi_k(x) = \phi_0 \tanh(x/2d), \quad (2)$$

$$A = ml^2, \quad d = l_0/\omega_0,$$

とする. キンクと波束フォノンとの衝突過程は, 和田と Schrieffer²⁾によって調べられた. 彼らは低温領域を考えて以下の近似を行なった. (1)キンクの密度は小さいとし, キンク間相互作用は無視する. (2)熱励起フォノンの振幅は十分小さいと考えて, それに関する摂動で計算する. 2次の計算の結果, 衝突後キンクの中心がシフトすることが示された (図1). 熱平衡状態では熱励起されたフォノンがキンクに左右からランダムに衝突し, その度にキンクがシフトするので, その結果キンクはランダムウォーク的なブラウン運動をされると考えられる. この考えに従って, 彼らは拡散係数を

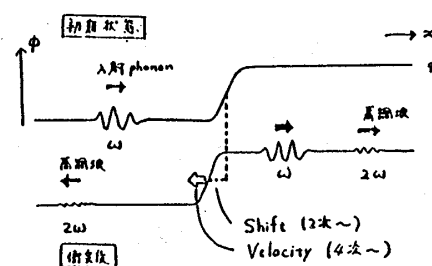


図1

$$D_{\text{WS}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \delta^2(t) \rangle / 2t, \quad (\delta(t) : \text{キンのシフト}) \quad (3)$$

によって計算した。シフト $\delta(t)$ はフォノンの振幅の 2 乗に比例するので D_{WS} は T^2 に比例する。(T : 温度) 詳しい計算によると

$$D_{\text{WS}} = 2.06 (k_{\text{B}}T / m l d \omega_0^2 \phi_0^2)^2 d^2 \omega_0, \quad (4)$$

となる。^{2,3)}

一方 4 次のオーダーでは、キークフォノン間の運動量交換が生じる (図 1)。⁴⁾ 通常のブラウン粒子の場合を思い出してみると、水分子との運動量交換は粒子に対する粘性抵抗を生ずる。この描像を ϕ^4 -キンクに対して適用することが許されるとすれば、4 次の運動量交換は T^2 に比例した粘性係数 Γ を生ずることになる。実際に我々は森⁵⁾の公式を用いてこの Γ を計算し、

$$\Gamma = 0.1224 (k_{\text{B}}T / m l d \omega_0^2 \phi_0^2)^2 \omega_0, \quad (5)$$

を得た。⁶⁾ ブラウン粒子の場合の Einstein の関係 $D = k_{\text{B}}T / M\Gamma$ にこの粘性をあてはめると、 T^{-1} に比例した拡散係数が得られる。これは (4) 式の D_{WS} と明らかに異なる。このことからキークのブラウン運動に対しては 2 つの機構が共存しているといえる。1 つは、2 次のシフトから生じるランダムウォーク的なブラウン運動であり、もう 1 つは粘性と結びついたブラウン粒子的なブラウン運動である。

キンクに対する揺動散逸定理

上記の 2 つの機構の関係を揺動散逸定理によって明らかにしよう。以下計算の概略を示す。まずもとの場 $\phi(x, t)$ を

$$\phi(x, t) = \phi_K(x - X(t)) + \chi(x - X(t), t), \quad (6a)$$

を変換する。但し拘束条件

$$\int \chi(x - X(t), t) \frac{\partial \phi_K}{\partial x}(x - X(t)) dx = 0, \quad (6b)$$

を付ける。⁷⁾ この変換によってキークの中心座標 $X(t)$ が定義され、その運動方程式が得られる。次に $X(t)$ に対して森⁵⁾の揺動力に関する公式を適用する。すると運動方程式は一般化された Langevin 方程式

$$\ddot{X}(t) = - \int_0^t r(t-\tau) \dot{X}(\tau) d\tau + R(t), \quad (7)$$

$$R(t) = \exp(-itP'L) \ddot{X},$$

$$r(t) = \langle R(t) R(0) \rangle / \langle \dot{X} \dot{X} \rangle,$$

$\langle \rangle$ は初期値に関するカノニカル平均

$P' = 1 - P$, P は \dot{X} への射影演算子

L は Liouville 演算子,

に書き換えられる。さらに第一種揺動散逸定理

$$D(\omega) \equiv \int_0^\infty \langle \dot{X}(t) \dot{X}(0) \rangle e^{-i\omega t} dt = \langle \dot{X} \dot{X} \rangle / i\omega + \Gamma(\omega), \quad (8)$$

$$\Gamma(\omega) \equiv \int_0^\infty r(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (9)$$

が成り立つ。 $\Gamma(\omega)$ を低温展開し、 $\omega \sim 0$ の付近を調べると、

$$\Gamma(\omega) = \Gamma + i\omega A + D_{WS} \omega^2 / \langle \dot{X} \dot{X} \rangle + O(\omega^3) \quad (10)$$

(A は実の量で T に比例する)

を得る。これを(8)式に代入した式が低温、低振動数での Γ と D の関係を与える。 $\omega \rightarrow 0$ の極限では Einstein の関係 $D(\omega=0) = k_B T / M\Gamma \propto T^{-1}$ が成り立つ ($M = 2m\ell\phi_0^2/3d$: キンクの質量)。一方、有限の ω で $T \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $D(\omega) = k_B T / i\omega M + D_{WS} + \dots$ となり、実部の最低次が(4)式の拡散係数となっている(図2)。これからわかる様に、 ω と T の領域によって観測されるブラウン運動のメカニズムが変わる。

実際に実験でこれらの効果が測定されるかどうか

が興味ある問題である。ポリアセチレンに対する NMR の実験で、 T_1 の測定からスピンの拡散係数が得られる。⁸⁾ ここで測定されるスピンを、動いているソリトンの持つスピンとみなして、キンクのブラウン運動の理論と合わせようという試みがなされている。

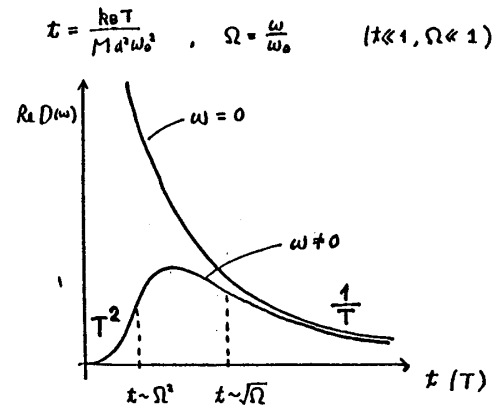


図2

- 1) J. A. Krumhansl and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **B11** (1975) 3535.
- 2) Y. Wada and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **B18** (1978) 3897.
- 3) N. Theodorakopoulos, Z. Physik **B33** (1979) 385.
- 4) H. Ishiuchi and Y. Wada, Prog. Theor. Phys. **69** (1980) Supple. p242.
M. Ogata and Y. Wada, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 3855.
- 5) H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.
- 6) M. Ogata and Y. Wada, submitted to J. Phys. Soc. Jpn.
- 7) この拘束条件は χ に Goldstone モードが含まれないことを示している。この様なキンの中心座標の導入の仕方は場の理論において発展したもので collective coordinate method と呼ばれる。Review として
R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 681.
- 8) M. Nechtschein, F. Dewenx, F. Genoud, M. Guglielmi, and K. Holczer, Phys. Rev. **B27** (1983) 61.

Soliton 系の統計力学
— Ideal-Gas Phenomenology と
Bethe Ansatz Thermodynamics —

常葉学園大 石川正勝
京大基研 高山 一

1. 序

古典可積分ソリトン系の ideal-gas phenomenology (IGP) を、すべての励起モード間相互作用による phase shift (又は spatial shift) からくる効果を self-consistent に取入れる¹⁾ ことによつて拡張する。その際、量子統計を用い半量子論的取扱いをする。そのように拡張された IGP は対応する量子系の Bethe 仮設法による統計力学と等価であることが示される。しかる後に $\hbar \rightarrow 0$ の古典極限をとり古典系の拡張された IGP を得る。

具体的には δ -関数型相互作用を持つ 1 次元 Bose ガス系と戸田格子を考える。

2. 拡張された IGP

励起モードの分枝を添字 i で区別する。 P_j -モードが励起されている為に P_i -モードの受け