厳密に解ける格子モデルのBethe波動関数

筑波大・物理　吉　田　春　彦

§1　はじめに

量子逆散乱法の発展に伴い，1＋1次元の場の量子論，2次元の統計力学，1次元量子スピン系，における解けるモデルの共通性が明らかになってきた．[1] 量子逆散乱法には，連続型の理論(Thacker et al.)[2] と離散型の理論 (Fadeev et al.)[3] がある．特に，離散型の理論は，Yang-Baxter関係式を軸として，転送行列の方法，Bethe仮説法，S行列の因子化理論，等の量子完全可積分系の解法の統一的理解を与える．ここでは，従来の Bethe 仮説法 (coordinate Bethe ansatz)[4] の一般的な形を，離散型の量子逆散乱法から導く．これは同時にBethe仮説の証明を与えることになる．以下では，特に任意スピンのHeisenbergモデル[5,6] を例に挙げて説明する．

§2　Yang-Baxter関係式

量子逆散乱法の基礎となるのは，次のYang-Baxter関係式（YBR）[5] である．

$$
{}_{s_1 s_2}\widehat{R}(\lambda-\mu)({}_{s_1 s_3}R^{0n}(\lambda)\otimes{}_{s_2 s_3}R^{0n}(\mu))
$$
$$
=({}_{s_2 s_3}R^{0n}(\mu)\otimes{}_{s_1 s_3}R^{0n}(\lambda))\,{}_{s_1 s_2}\widehat{R}(\lambda-\mu) \qquad (2,\ 1)
$$

${}_{s_j s_k}R^{0n}(\lambda)$ は局所モノドロミー行列であり，スピン演算子または場の演算子を成分にもつ．h_0 を補助空間，h_n（$1\leq n\leq N$）を量子空間とすると ${}_{s_j s_k}R^{0n}(\lambda)$ は $h_0\otimes h_n$ に作用する．（$\dim h_0=2S_j+1$，$\dim h_n=2S_k+1$）${}_{s_1 s_2}\widehat{R}(\lambda-\mu)$ はスペクトルパラメータ λ，μ の c 数関数を成分とする行列であり，ここではCPT対称性をもつものとする．このYBRを満すモデルには，q-state vertex model[7] および，それと等価なHeisenberg XXX[5]，XXZ[6] model,[8] lattice nonlinear Schrödinger model[8]，lattice Sine-Gordon model[8] 等が含まれる．

例）Heisenberg XXX model（任意スピン）[5]

$$
{}_{\sigma s}R^{0n}(\lambda)=\frac{1-2\lambda}{2}I^0\otimes I^n+\vec{\sigma}_0\otimes\vec{S}_n \qquad (2,\ 2)
$$

$$
{}_{ss}R^{0n}(\lambda)=-\sum_{j=0}^{2s}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda-k}{\lambda+k}\prod_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{2s}\frac{(\vec{S}_0\otimes\vec{S}_n)-x_l}{x_j-x_l} \qquad (2,\ 3)
$$

$$x_l=\frac{1}{2}\left[l(l+1)-2S(S+1)\right]$$

但し，$\sigma=\frac{1}{2}$ であり，$\vec{\sigma}=(\sigma^x,\sigma^y,\sigma^z)$，$\vec{S}=(S^x,S^y,S^z)$ はそれぞれ，パウリ行列とスピン行列である．

§3　転送行列と保存量の関係

モノドロミー行列 ${}_{s_1s_2}T_N(\lambda)$，転送行列 ${}_{s_1s_2}F_N(\lambda)$ をそれぞれ次のように定義する．

$$ {}_{s_1s_2}T_N(\lambda)={}_{s_1s_2}R^{0n}(\lambda)\,{}_{s_1s_2}R^{0n-1}(\lambda)\cdots\cdots{}_{s_1s_2}R^{01}(\lambda) \qquad (3,1)$$

$$ {}_{s_1s_2}F_N(\lambda)=\mathrm{tr}\,{}_{s_1s_2}T_N(\lambda) \qquad (3,2)$$

但し trace は補助空間 h_0 でとる．YBR(2, 1) から，

$$\left[{}_{s_1s_3}F_N(\lambda),\ {}_{s_2s_3}F_N(\lambda)\right]=0 \qquad (3,3)$$

であり，${}_{ss}F_N(\lambda)$ は保存量の母関数となる．特に $N\to\infty$（熱力学的極限）のときは，無限個の保存量が存在する．

例）Heisenberg XXX model（スピン S）の Hamiltonian [5)]

$$\begin{aligned} H_s&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln{}_{ss}F_N(\lambda)\Big|_{\lambda=0}\\ &=-\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{2s}\Big(\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k}\Big)\prod_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{2s}\Big(\frac{\vec{S}_n\vec{S}_{n+1}-x_l}{x_j-x_l}\Big) \end{aligned} \qquad (3,4)$$

$$H_{\frac{1}{2}}=-\sum_{n=1}^{N}\vec{\sigma}_n\vec{\sigma}_{n+1} \qquad (3,5)$$

$$H_1=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\left[\vec{S}_n\vec{S}_{n+1}-(\vec{S}_n\vec{S}_{n+1})^2\right] \qquad (3,6)$$

§4　転送行列の対角化

(3, 3) 式から，${}_{\sigma s}F_N(\lambda)$ と ${}_{ss}F_N(\lambda)$ は同時対角化できることを利用する．

$$ {}_{\sigma s}T_N(\lambda)={}_{\sigma s}R^{0n}(\lambda)\,{}_{\sigma s}R^{0n-1}(\lambda)\cdots\cdots{}_{\sigma s}R^{01}(\lambda)\equiv\begin{pmatrix}A_N(\lambda) & B_N(\lambda)\\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda)\end{pmatrix}, \qquad (4,1)$$

とする．今，真空状態を，

$$|0>=\bigotimes_{n=1}^{N}|0>_n,\quad |0>_n=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}:\ 2S+1\ \text{行のベクトル} \qquad (4,2)$$

ととる．このとき状態ベクトル(algebraic Bethe state)

$$|\lambda_1\cdots\lambda_n>_N = B_N(\lambda_1)\,B_N(\lambda_2)\cdots\cdots B_N(\lambda_n)\,|\,0> \tag{4, 3}$$

は，周期的境界条件が成立つとき ${}_{\sigma s}F_N(\lambda)$，${}_{ss}F_N(\lambda)$ の固有状態となる．

§5　補助線形問題

次の補助線形問題を考える．

$$\begin{cases} G_N(n+1,\lambda) = L_n(\lambda)\,G_N(n,\lambda) \\ G_N(1,\lambda) = I,\ G_N(N+1,\lambda) = T_N(\lambda) \end{cases} \tag{5, 1}$$

ここでは $L_n(\lambda) = {}_{\sigma s}R^{0n}(\lambda)$，$T_N(\lambda) = {}_{\sigma s}T_N(\lambda)$ である．(5, 1)式を解くことにより，モノドロミー演算子 $A_N(\lambda)$，$B_N(\lambda)$，$C_N(\lambda)$，$D_N(\lambda)$ をスピン演算子または場の演算子(座標表示)で表わすことができる．すなわち，

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= V^{-N}(\lambda)\,T_N(\lambda)\,V(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= I + \sum_{i=1}^{N} \sum_{m_1\cdots m_i} \theta(m_1>\cdots>m_i)\,(\Lambda_{m_1}(\lambda)\cdots\Lambda_{m_i}(\lambda)) \end{aligned} \tag{5, 2}$$

但し，$V(\lambda) = {}_n<0\,|\,L_n(\lambda)\,|\,0>_n$，$V(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & 0 \\ 0 & d(\lambda) \end{pmatrix}$

$$\Lambda_n(\lambda) = V^{-n-1}(\lambda)\,\tau(n,\lambda)\,V^n(\lambda)$$

$$\tau(n,\lambda) = L_n(\lambda) - V(\lambda) = \begin{pmatrix} \tau_{11}(n,\lambda) & \tau_{12}(n,\lambda) \\ \tau_{21}(n,\lambda) & \tau_{22}(n,\lambda) \end{pmatrix}$$

となる．以下では $B_N(\lambda)$ の代わりに $B(\lambda)$ を使う．

§6　Bethe 状態の座標表示(coordinate Bethe state)

導出の過程は複雑なので，結果だけ示す．

YBRのconsistency conditionから次の2つの条件式を得る．

$$\widehat{R}(\lambda-\mu)\,\widehat{R}(\mu-\lambda) = I \tag{6, 1}$$

$$\begin{aligned} &(I\otimes\widehat{R}(\lambda-\mu))(\widehat{R}(\lambda-\sigma)\otimes I)(I\otimes\widehat{R}(\mu-\sigma)) \\ &= (\widehat{R}(\mu-\sigma)\otimes I)(I\otimes\widehat{R}(\lambda-\sigma))(\widehat{R}(\lambda-\mu)\otimes I) \end{aligned} \tag{6, 2}$$

但し，$\hat{R}(\lambda-\mu)\equiv{}_{\sigma\sigma}\hat{R}(\lambda-\mu)=\begin{pmatrix}1&&&\\&b(\lambda\mu)&c(\lambda\mu)&\\&c(\lambda\mu)&b(\lambda\mu)&\\&&&1\end{pmatrix}$ $\quad(6,3)$

（6，1）はユニタリー条件式，（6，2）は因子化方程式である．（6，1)，(6，2）を必要十分条件として，coordinate Bethe stateは次のように書ける．[9]

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1\cdots\lambda_n> &= B(\lambda_1)B(\lambda_2)\cdots\cdots B(\lambda_n)|0> \\
&= \sum_{r_1\cdots r_n}\prod_{1\le j<l\le n}\{1+\sigma(\lambda_j\lambda_l)\theta(r_j>r_l)+\sigma(\lambda_l\lambda_j)\theta(r_l>r_j)\} \\
&\qquad\times\prod_{l=1}^{n}A^{r_l}(\lambda_l)\prod_{l=1}^{n}\tilde{\tau}_{12}(r_l\lambda_l)|0> \\
&= N_n(\lambda_1\cdots\lambda_n)\sum_{r_1\cdots r_n}\prod_{1\le j<l\le n}\{c(\lambda_j\lambda_l)\delta_{r_jr_l}+\theta(r_j>r_l) \\
&\qquad+S(\lambda_j\lambda_l)\theta(r_l>r_j)\}\prod_{l=1}^{n}A^{r_l}(\lambda_l)\prod_{l=1}^{n}\tilde{\tau}_{12}(r_l\lambda_l)|0>
\end{aligned}
\qquad (6,4)
$$

$\sigma(\lambda\mu)=c^{-1}(\lambda\mu)-1$，$S(\lambda\mu)=\dfrac{c(\lambda\mu)}{c(\mu\lambda)}$ ：2体の S 行列

$A(\lambda)=\dfrac{d(\lambda)}{a(\lambda)}$，$\tilde{\tau}_{12}(r\lambda)=a^{-1}(\lambda)\tau_{12}(r\lambda)$

である．

例）Heisenberg XXZ model（任意スピン）

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1\cdots\lambda_n> &= N_n(\lambda_1\cdots\lambda_n)\sum_{r_1\cdots r_n}\prod_{1\le j<l\le n}\{c(\lambda_j\lambda_l)\delta_{r_jr_l}+\theta(r_j>r_l) \\
&\quad+S(\lambda_j\lambda_l)\theta(r_l>r_j)\}\prod_{l=1}^{n}e^{ik_lr_l}\prod_{l=1}^{n}S^-_{r_l}|0>
\end{aligned}
\qquad (6,5)
$$

$$c(\lambda\mu)=\frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin(\lambda-\mu-2\eta)},\quad S(\lambda\mu)=\frac{\sin(\lambda-\mu+2\eta)}{\sin(\lambda-\mu-2\eta)}$$

$$e^{ik_l}=\frac{\sin(\lambda_l+\eta)}{\sin(\lambda_l-\eta)},\quad S^-=S^x-iS^y$$

特に，スピン $S=\dfrac{1}{2}$ のとき，通常のBethe仮説の形が得られる．

$$
\begin{aligned}
|\lambda_1\cdots\lambda_n> &= N_n(\lambda_1\cdots\lambda_n)\sum_{r_1\cdots r_n}\prod_{1\le j<l\le n}\{\theta(r_j>r_l)+S(\lambda_j\lambda_l)\theta(r_l>r_j)\} \\
&\qquad\times\prod_{l=1}^{n}e^{ik_lr_l}\prod_{l=1}^{n}\sigma^-_{r_l}|0> \\
&= \sum_{1\le r_1<\cdots<r_n\le N}f(r_1,\cdots,r_n)\sigma^-_{r_1}\cdots\sigma^-_{r_n}|0>
\end{aligned}
\qquad (6,6)
$$

$$f(r_1, \cdots, r_n) = \sum_P a(P) \exp\left(\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} k_{Pj} r_j\right) \tag{6, 7}$$

(6, 7)はBetheの波動関数である．Pは置換演算子であり，和は$(1, \cdots, n)$の全ての置換について取る．係数$a(P)$は2体のS行列で因子化され，

$$\frac{a(P)}{a(Q)} = \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_l + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_l - 2\eta)} \tag{6, 8}$$

である．PとQはλ_jとλ_lの互換だけ異なった置換である．$\lambda \to \lambda\varepsilon$，$\eta \to \eta\varepsilon$で$\varepsilon \to 0$とするとXXX modelへ移行する．以上のように(6, 5)は(6, 6)，(6, 7)の任意スピンへの拡張になっている．

§7　結び

本稿では，1次元量子スピン系を例として，coordinate Bethe stateを量子逆散乱法から導いた．場の量子論のモデルでも，厳密に解けるlattice version[8]が存在すれば，同様にしてBethe波動関数が得られる．これらのBethe状態と古典解(例えば束縛状態とソリトン)[10]がどのような対応関係にあるかを見るのも，今後の課題として興味深い問題である．

参考文献

1) 和達三樹，日本物理学会誌 **36** (1981) 786.
2) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
3) L. D. Faddeev, Sov. Sci. Rev. Math. Phys. **C1** (1980) 107.
4) H. A. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.
5) H. M. Babujian, Nucl. Phys. **B215** (1983) 317.
6) K. Sogo, Phys. Lett. **104A** (1984) 51.
7) K. Sogo, Y. Akutsu and T. Abe, Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 730; 739.
8) A. G. Izergin and V. E. Korepin, Nucl. Phys. **B205** (1982) 401.
9) H. Yoshida and M. Omote, in preparation.
10) M. Wadati and M. Sakagami, J. Phy. Soc. Jpn. **53** (1984) 1933.