

厳密に解ける格子モデルの Bethe 波動関数

筑波大・物理 吉田 春彦

§1 はじめに

量子逆散乱法の発展に伴い、1+1次元の場の量子論、2次元の統計力学、1次元量子スピン系、における解けるモデルの共通性が明らかになってきた。¹⁾ 量子逆散乱法には、連続型の理論(Thacker et al.)²⁾と離散型の理論(Fadeev et al.)³⁾がある。特に、離散型の理論は、Yang-Baxter 関係式を軸として、転送行列の方法、Bethe 仮説法、S行列の因子化理論、等の量子完全可積分系の解法の統一的理解を与える。ここでは、従来の Bethe 仮説法 (coordinate Bethe ansatz)⁴⁾の一般的な形を、離散型の量子逆散乱法から導く。これは同時に Bethe 仮説の証明を与えることになる。以下では、特に任意スピンの Heisenberg モデル^{5, 6)}を例に挙げて説明する。

§2 Yang-Baxter 関係式

量子逆散乱法の基礎となるのは、次の Yang-Baxter 関係式 (YBR)⁵⁾である。

$$\begin{aligned} {}_{s_1 s_2} \widehat{R}(\lambda - \mu) ({}_{s_1 s_3} R^{0n}(\lambda) \otimes {}_{s_2 s_3} R^{0n}(\mu)) \\ = ({}_{s_2 s_3} R^{0n}(\mu) \otimes {}_{s_1 s_3} R^{0n}(\lambda)) {}_{s_1 s_2} \widehat{R}(\lambda - \mu) \end{aligned} \quad (2, 1)$$

${}_{s_j s_k} R^{0n}(\lambda)$ は局所モノドロミー行列であり、スピン演算子または場の演算子を成分にもつ。 h_0 を補助空間、 $h_n (1 \leq n \leq N)$ を量子空間とすると ${}_{s_j s_k} R^{0n}(\lambda)$ は $h_0 \otimes h_n$ に作用する。 $(\dim h_0 = 2S_j + 1, \dim h_n = 2S_k + 1)$ ${}_{s_1 s_2} \widehat{R}(\lambda - \mu)$ はスペクトルパラメータ λ, μ の c 数関数を成分とする行列であり、ここでは CPT 対称性をもつものとする。この YBR を満すモデルには、q-state vertex model⁷⁾ および、それと等価な Heisenberg XXX⁵⁾, XXZ⁶⁾ model,⁸⁾ lattice nonlinear Schrödinger model⁸⁾, lattice Sine-Gordon model⁸⁾ 等が含まれる。

例) Heisenberg XXX model (任意スピン)⁵⁾

$${}_{ss} R^{0n}(\lambda) = \frac{1-2\lambda}{2} I^0 \otimes I^n + \vec{\sigma}_0 \otimes \vec{S}_n \quad (2, 2)$$

$${}_{ss} R^{0n}(\lambda) = - \sum_{j=0}^{2s} \prod_{k=1}^j \frac{\lambda - k}{\lambda + k} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{2s} \frac{(\vec{S}_0 \otimes \vec{S}_n) - x_l}{x_j - x_l} \quad (2, 3)$$

$$x_l = \frac{1}{2} [l(l+1) - 2S(S+1)]$$

但し, $\sigma = \frac{1}{2}$ であり, $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$, $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$ はそれぞれ, パウリ行列とスピンの行列である.

§3 転送行列と保存量の関係

モノドロミー行列 ${}_{s_1 s_2} T_N(\lambda)$, 転送行列 ${}_{s_1 s_2} F_N(\lambda)$ をそれぞれ次のように定義する.

$${}_{s_1 s_2} T_N(\lambda) = {}_{s_1 s_2} R^{0n}(\lambda) {}_{s_1 s_2} R^{0n-1}(\lambda) \cdots {}_{s_1 s_2} R^{01}(\lambda) \quad (3, 1)$$

$${}_{s_1 s_2} F_N(\lambda) = \text{tr} {}_{s_1 s_2} T_N(\lambda) \quad (3, 2)$$

但し trace は補助空間 h_0 でとる. YBR(2, 1) から,

$$[{}_{s_1 s_3} F_N(\lambda), {}_{s_2 s_3} F_N(\lambda)] = 0 \quad (3, 3)$$

であり, ${}_{ss} F_N(\lambda)$ は保存量の母関数となる. 特に $N \rightarrow \infty$ (熱力学的極限) のときは, 無限個の保存量が存在する.

例) Heisenberg XXX model (スピン S) の Hamiltonian ⁵⁾

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{d}{d\lambda} \ln {}_{ss} F_N(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \\ &= - \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{2s} \left(\sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \right) \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq j}}^{2s} \frac{\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - x_\ell}{x_j - x_\ell} \end{aligned} \quad (3, 4)$$

$$H_{\frac{1}{2}} = - \sum_{n=1}^N \vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_{n+1} \quad (3, 5)$$

$$H_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N [\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - (\vec{S}_n \vec{S}_{n+1})^2] \quad (3, 6)$$

§4 転送行列の対角化

(3, 3) 式から, ${}_{\sigma_s} F_N(\lambda)$ と ${}_{ss} F_N(\lambda)$ は同時対角化できることを利用する.

$${}_{\sigma_s} T_N(\lambda) = {}_{\sigma_s} R^{0n}(\lambda) {}_{\sigma_s} R^{0n-1}(\lambda) \cdots {}_{\sigma_s} R^{01}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4, 1)$$

とする. 今, 真空状態を,

$$|0\rangle = \bigotimes_{n=1}^N |0\rangle_n, \quad |0\rangle_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : 2S+1 \text{ 行のベクトル} \quad (4, 2)$$

ととる. このとき状態ベクトル (algebraic Bethe state)

$$|\lambda_1 \cdots \lambda_n\rangle_N = B_N(\lambda_1) B_N(\lambda_2) \cdots B_N(\lambda_n) |0\rangle \quad (4, 3)$$

は, 周期的境界条件が成立つとき ${}_{\sigma_s} F_N(\lambda)$, ${}_{ss} F_N(\lambda)$ の固有状態となる.

§5 補助線形問題

次の補助線形問題を考える.

$$\begin{cases} G_N(n+1, \lambda) = L_n(\lambda) G_N(n, \lambda) \\ G_N(1, \lambda) = I, G_N(N+1, \lambda) = T_N(\lambda) \end{cases} \quad (5, 1)$$

ここでは $L_n(\lambda) = {}_{\sigma_s} R^{0n}(\lambda)$, $T_N(\lambda) = {}_{\sigma_s} T_N(\lambda)$ である. (5, 1) 式を解くことにより, モノドロミー演算子 $A_N(\lambda)$, $B_N(\lambda)$, $C_N(\lambda)$, $D_N(\lambda)$ をスピン演算子または場の演算子 (座標表示) で表わすことができる. すなわち,

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= V^{-N}(\lambda) T_N(\lambda) V(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= I + \sum_{i=1}^N \sum_{m_1 \cdots m_i} \theta(m_1 > \cdots > m_i) (A_{m_1}(\lambda) \cdots A_{m_i}(\lambda)) \end{aligned} \quad (5, 2)$$

但し, $V(\lambda) = {}_n \langle 0 | L_n(\lambda) | 0 \rangle_n$, $V(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & 0 \\ 0 & d(\lambda) \end{pmatrix}$

$$A_n(\lambda) = V^{-n-1}(\lambda) \tau(n, \lambda) V^n(\lambda)$$

$$\tau(n, \lambda) = L_n(\lambda) - V(\lambda) = \begin{pmatrix} \tau_{11}(n, \lambda) & \tau_{12}(n, \lambda) \\ \tau_{21}(n, \lambda) & \tau_{22}(n, \lambda) \end{pmatrix}$$

となる. 以下では $B_N(\lambda)$ の代わりに $B(\lambda)$ を使う.

§6 Bethe 状態の座標表示 (coordinate Bethe state)

導出の過程は複雑なので, 結果だけ示す.

YBR の consistency condition から次の 2 つの条件式を得る.

$$\widehat{R}(\lambda - \mu) \widehat{R}(\mu - \lambda) = I \quad (6, 1)$$

$$\begin{aligned} & (I \otimes \widehat{R}(\lambda - \mu)) (\widehat{R}(\lambda - \sigma) \otimes I) (I \otimes \widehat{R}(\mu - \sigma)) \\ &= (\widehat{R}(\mu - \sigma) \otimes I) (I \otimes \widehat{R}(\lambda - \sigma)) (\widehat{R}(\lambda - \mu) \otimes I) \end{aligned} \quad (6, 2)$$

$$\text{但し, } \widehat{R}(\lambda - \mu) \equiv {}_{\sigma\sigma} \widehat{R}(\lambda - \mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b(\lambda\mu) & c(\lambda\mu) & \\ & c(\lambda\mu) & b(\lambda\mu) & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (6, 3)$$

(6, 1) はユニタリー条件式, (6, 2) は因子化方程式である. (6, 1), (6, 2) を必要十分条件として, coordinate Bethe state は次のように書ける.⁹⁾

$$\begin{aligned} |\lambda_1 \cdots \lambda_n\rangle &= B(\lambda_1) B(\lambda_2) \cdots B(\lambda_n) |0\rangle \\ &= \sum_{r_1 \cdots r_n} \prod_{1 \leq j < l \leq n} \{1 + \sigma(\lambda_j, \lambda_l) \theta(r_j > r_l) + \sigma(\lambda_l, \lambda_j) \theta(r_l > r_j)\} \\ &\quad \times \prod_{l=1}^n A^{r_l}(\lambda_l) \prod_{l=1}^n \widetilde{\tau}_{12}(r_l, \lambda_l) |0\rangle \\ &= N_n(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \sum_{r_1 \cdots r_n} \prod_{1 \leq j < l \leq n} \{c(\lambda_j, \lambda_l) \delta_{r_j r_l} + \theta(r_j > r_l) \\ &\quad + S(\lambda_j, \lambda_l) \theta(r_l > r_j)\} \prod_{l=1}^n A^{r_l}(\lambda_l) \prod_{l=1}^n \widetilde{\tau}_{12}(r_l, \lambda_l) |0\rangle \quad (6, 4) \end{aligned}$$

$$\sigma(\lambda\mu) = c^{-1}(\lambda\mu) - 1, \quad S(\lambda\mu) = \frac{c(\lambda\mu)}{c(\mu\lambda)} : 2 \text{ 体の } S \text{ 行列}$$

$$A(\lambda) = \frac{d(\lambda)}{a(\lambda)}, \quad \widetilde{\tau}_{12}(r\lambda) = a^{-1}(\lambda) \tau_{12}(r\lambda)$$

である.

例) Heisenberg XXZ model (任意スピソ)

$$\begin{aligned} |\lambda_1 \cdots \lambda_n\rangle &= N_n(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \sum_{r_1 \cdots r_n} \prod_{1 \leq j < l \leq n} \{c(\lambda_j, \lambda_l) \delta_{r_j r_l} + \theta(r_j > r_l) \\ &\quad + S(\lambda_j, \lambda_l) \theta(r_l > r_j)\} \prod_{l=1}^n e^{ik_l r_l} \prod_{l=1}^n S_{r_l}^- |0\rangle \quad (6, 5) \end{aligned}$$

$$c(\lambda\mu) = \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\sin(\lambda - \mu - 2\eta)}, \quad S(\lambda\mu) = \frac{\sin(\lambda - \mu + 2\eta)}{\sin(\lambda - \mu - 2\eta)}$$

$$e^{ik_l} = \frac{\sin(\lambda_l + \eta)}{\sin(\lambda_l - \eta)}, \quad S^- = S^x - i S^y$$

特に, スピソ $S = \frac{1}{2}$ のとき, 通常の Bethe 仮説の形が得られる.

$$\begin{aligned} |\lambda_1 \cdots \lambda_n\rangle &= N_n(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \sum_{r_1 \cdots r_n} \prod_{1 \leq j < l \leq n} \{\theta(r_j > r_l) + S(\lambda_j, \lambda_l) \theta(r_l > r_j)\} \\ &\quad \times \prod_{l=1}^n e^{ik_l r_l} \prod_{l=1}^n \sigma_{r_l}^- |0\rangle \\ &= \sum_{1 \leq r_1 < \cdots < r_n \leq N} f(r_1, \cdots, r_n) \sigma_{r_1}^- \cdots \sigma_{r_n}^- |0\rangle \quad (6, 6) \end{aligned}$$

$$f(r_1, \dots, r_n) = \sum_P a(P) \exp\left(i \sum_{j=1}^n k_{P_j} r_j\right) \quad (6, 7)$$

(6, 7)は Bethe の波動関数である。\$P\$は置換演算子であり、和は \$(1, \dots, n)\$の全ての置換について取る。係数 \$a(P)\$は2体の \$S\$行列で因子化され、

$$\frac{a(P)}{a(Q)} = \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_l + 2\eta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_l - 2\eta)} \quad (6, 8)$$

である。\$P\$と \$Q\$は \$\lambda_j\$と \$\lambda_l\$の互換だけ異なった置換である。\$\lambda \to \lambda \varepsilon\$, \$\eta \to \eta \varepsilon\$で \$\varepsilon \to 0\$とすると XXX model へ移行する。以上のように (6, 5)は (6, 6), (6, 7)の任意スピンへの拡張になっている。

§7 結び

本稿では、1次元量子スピン系を例として、coordinate Bethe state を量子逆散乱法から導いた。場の量子論のモデルでも、厳密に解ける lattice version⁸⁾が存在すれば、同様にして Bethe 波動関数が得られる。これらの Bethe 状態と古典解 (例えば束縛状態とソリトン)¹⁰⁾がどのような対応関係にあるかを見るのも、今後の課題として興味深い問題である。

参考文献

- 1) 和達三樹, 日本物理学会誌 **36** (1981) 786.
- 2) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
- 3) L. D. Faddeev, Sov. Sci. Rev. Math. Phys. **C1** (1980) 107.
- 4) H. A. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.
- 5) H. M. Babujian, Nucl. Phys. **B215** (1983) 317.
- 6) K. Sogo, Phys. Lett. **104A** (1984) 51.
- 7) K. Sogo, Y. Akutsu and T. Abe, Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 730; 739.
- 8) A. G. Izergin and V. E. Korepin, Nucl. Phys. **B205** (1982) 401.
- 9) H. Yoshida and M. Omote, in preparation.
- 10) M. Wadati and M. Sakagami, J. Phy. Soc. Jpn. **53** (1984) 1933.