フェルミオンを含む系のスペクトル変換

筑波大・物理　井上和彦，表　実

非線形の場の方程式を持つ場の理論を研究する上で，もとの場の変数から，より簡単な方程式に従う変数あるいは物理的に意味を持つ変数への，変数変換を行う事は，重要である．この意味で，スペクトル変換法（又は逆散乱法）は，そのような変数変換を見つける上で非常に有効な方法である．

このスペクトル変換法を，フェルミ場を含む系に適用する時に，注意すべき事は，場の変数が反交換性を持つ事である．計算を行う上で，この反交換性によって生じる部分的な符号の変化を機械的に処理するために，超空間（x，t，θ）を導入し，その上でスペクトル変換法の定式化を行い，それを具体的に応用した結果をここで報告する．

§ 超空間上のLax pairの定式化

まず，ポテンシャル場として，フェルミ場$\psi_i(x, t)$に対するLax pairとして，

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi(x, t, \theta; \lambda) = M(\psi_i; \theta, \partial_\theta; \lambda)\Phi(x, t, \theta; \lambda), & (1a) \\ i\partial_x \Phi(x, t, \theta; \lambda) = L(\psi_i; \theta, \partial_\theta; \lambda)\Phi(x, t, \theta; \lambda), & (1b) \end{cases}$$

を考える．ここで，θをグラスマン数で，フェルミ場と反可換であるとする．∂_θはθについての微分であり，λはスペクトルパラメーターである．一般的には，Φはn成分ベクトルであり，LとMは$n\times n$行列であるが，以下の応用では，$n=2$で十分である．

さらに，線形補助問題（1b）の散乱問題を，

$$\begin{cases} i\partial_x T(x, y; \theta, \partial_\theta; \lambda) = L(\psi_i(x); \theta, \partial_\theta, \lambda)\, T(x, y; \theta, \partial_\theta, \lambda) \\ T(x, x; \theta, \partial_\theta; \lambda) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

なる方程式に従う転送行列$T(x, y; \theta, \partial_\theta; \lambda)$を用いて解くわけであるが，これ以上の細い定式化の議論は，文献1)，2)，3)を御参照されたい．

§ 応用例Ⅰ (Classical massive Thirring model)

まず，最初の応用例として，massive Thirring modelの古典論を考える．この模型のLagrangian は

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}(\,\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\,)\psi-\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\cdot\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi \tag{3}$$

であり，式(1b)の $L(\psi_i;\theta,\partial_\theta;\lambda)$ は，

$$L=L_1+L_2\partial_\theta+\theta L_3+\theta L_4\partial_\theta \tag{4}$$

とした時

$$\begin{cases} L_1=g\bar{\psi}\gamma'\psi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad L_1+L_4=-m(\lambda^2-\lambda^{-2})/2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \\ L_2=\sqrt{\dfrac{mg}{2}}\begin{pmatrix}-\chi_+^*, & \chi_-^*\\ \chi_-, & \chi_+\end{pmatrix}, \quad L_3=\sqrt{\dfrac{mg}{2}}\begin{pmatrix}\chi_+, & -\chi_-^*\\ \chi_-, & \chi_+^*\end{pmatrix}, \end{cases} \tag{5}$$

である．但し，$\chi_\pm=\lambda\psi_1\pm\lambda^{-1}\psi_2$，$\chi_\pm^*=\lambda\psi_1^*\pm\lambda^{-1}\psi_2^*$ である．

これに対して，転送行列 $T(x,y)$ を

$$\begin{cases} T(x,y;\lambda)=\exp(-\mathrm{i}L_0x)\,U(x,y)\exp(\mathrm{i}L_0y) \\ L_0=-\dfrac{m}{2}(\lambda^2-\lambda^{-2})/2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\theta\partial_\theta \end{cases} \tag{6}$$

の形で求めた時に，散乱データ S は，

$$S=\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}U(x,y) \tag{7}$$

で与えられる．この S を

$$\begin{cases} S=S_1+S_2\partial_\theta+\theta S_3+\theta(S_4+S_1)\partial_\theta, \\ S_i=\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ c_i, & d_i\end{pmatrix}, \end{cases} \tag{8}$$

の形で表わすことにすると，$\log a_4(\lambda)$ が，ハミルトニアン，運動量を含む無限個の保存量の系列を与え，さらに，$a_2(\lambda)$，$b_2(\lambda)$ を用いて，ハミルトニアンを対角化する変数を作ることができるという結論を得た．（文献1)，2)，3)）

§ 応用例 II (Classical supersymmetric sine-Gordon model)

次の応用として，次の Lagrangian

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathrm{i}\,\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + 4\sin^2\frac{\phi}{2} + \mathrm{i}\,\bar{\psi}\psi\cos\frac{\phi}{2} \right), \tag{9}$$

で与えられるsupersymmetric sine-Gordon modelを考える．この時，式（1b）のLを式(4)のように表わすと

$$\begin{cases} L_1 = \dfrac{\pi}{4}\sigma_3 + k_0 \sin\dfrac{\phi}{2}\sigma_1 + k_1\cos\dfrac{\phi}{2}\sigma_2, \\ L_2 = \dfrac{\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}\left(\lambda\psi_1\sigma_3 - \dfrac{1}{\lambda}\psi_2\sigma_1 \right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{4}\phi\sigma_3}, \\ L_3 = \dfrac{\mathrm{i}}{4\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{4}\phi\sigma_3}\left(\dfrac{1}{\lambda}\psi_2\sigma_3 + \lambda\psi_1\sigma_1 \right), \\ L_1 + L_4 = k_1\sigma_2, \end{cases} \tag{10}$$

となる．但し，$k_1 = \frac{1}{4}(\lambda^2 - \lambda^{-2})$，$k_0 = \frac{1}{4}(\lambda^2 + \lambda^{-2})$，$\pi = \phi$であり，$\sigma_i\ (i = 1, 2, 3)$はPauli行列である．

これに対して，散乱データを，massive Thirring modelの場合と同様に求めると，無限個の保存量のうち，フェルミ場の偶数次の積からなるものは$\log(a_1(\lambda)/a_4(\lambda))$がその系列を与え，フェルミ場の奇数次の積からなる保存量は，$a_2(\lambda)$がその系列を与える事を示す事ができた．その中で，この模型に特徴的な保存量として，supersymmetryの変換の生成子Q_iが$a_2(\lambda)$の展開に現われ，ハミルトニアンP_0と運動量P_1が$\log(a_1(\lambda)/a_4(\lambda))$に現われ，それらが，

$$\begin{aligned} \{Q_i, Q_j\} &= 2\mathrm{i}(\gamma^\mu C)_{ij} P_\mu \\ \{Q_i, P_\mu\} &= \{P_i, P_\mu\} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

を満たすことも，散乱データのPoisson bracketsを計算する事により確められる．（文献4））

参考文献

1)　物性研究 **42**, No.3（1984），491.

2)　Prog. Theor. Phys. **72**, No. 3 (1984), 641.

3)　Phys. Lett. **147B**, (1984), 317.

4)　University of Tsukuba preprint, UTHEP-132.