Title	二成分非線型シュレディンガーモデルの量子逆散乱法(場の理論,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告)
Author(s)	鈴木, 康夫
Citation	物性研究 (1985), 45(1): 25-28
Issue Date	1985-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91819
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$$\phi_s(x,\ t) = \frac{2\eta}{|\kappa|^{1/2}} \exp(4\mathrm{i}\eta^2 t + \mathrm{i}\theta_0)\,\mathrm{sech}(2\eta x)$$

が出てくる．但し$4\eta = |\kappa|(n+1)$とおいた．さらに，ϕをはさむ状態をガリレイ変換すれば，movingソリトンも得られる．即ち，量子論で束縛状態をつくる粒子数nを無限大にするとその状態に関する$\phi(x)$の形状因子が古典ソリトン解になる．これはGoldstoneとJackiwの予想[10)]の一端と思われる．nが有限の時の波形をグラフにすると，$n=5\sim6$くらいですでにsechに近く，$n\to$大につれ，古典的波形に近づく様子がわかる．

参考文献

1) M. Wadati et al., Journal of Phys. Soc. Jpn to appear.
2) V. E. Zakharov et al., Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62.
3) V. E. Zakharov et al., Sov. Phys. JETP **37** (1973) 823.
4) I. B. McGulie, J. Math. Phys. **6** (1965) 432.
E. H. Lief and W. Liniger, Phys. Rev. **130** (1963) 1605.
5) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
6) A. Wissler, J. Math. Phys. **22** (1981) 750.
Y. Akutsu, unpublished.
7) A. B. Zamolodchikov et al.; Ann. Phys. **120** (1979) 253.
8) M. Wadati and M. Sakagami, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 1983.
9) M. Göckeler, Z. Phys. **C7** (1981) 263, **11** (1981) 125.
F. A. Smirnov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **262** (1982) 78.
10) J. Goldstone and R. Jackiw, Phys. Rev. **D11** (1975) 1486.

二成分非線型シュレディンガーモデルの量子逆散乱法

東大・教養　鈴　木　康　夫

量子非線型シュレディンガーモデルのハミルトニアンは，

$$H = \int \mathrm{d}x\,(u_x^+ u_x + \kappa : u^+ u u^+ u :) \tag{1}$$

であるが，このuを$u=(\phi_1,\ \phi_2)$と二成分に拡張したモデルの量子逆散乱法(Q.I.S.M.)

について研究した．

場の量 $\phi_1(x,t)$，$\phi_2(x,t)$ に次のような交換関係を設定した．

$$\begin{aligned}&\{\phi_1(x,t),\ \phi_1^{+}(y,t)\}=[\phi_2(x,t),\ \phi_2^{+}(y,t)]=\delta(x-y)\\&\{\phi_1(x,t),\ \phi_1(y,t)\}=[\phi_2(x,t),\ \phi_2(y,t)]=0\\&\{\phi_1^{+}(x,t),\ \phi_1^{+}(y,t)\}=[\phi_2^{+}(x,t),\ \phi_2^{+}(y,t)]=0\end{aligned}\tag{2}$$

運動方程式は，

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\,\phi_{1t}+\phi_{1xx}-2\kappa\phi_2^{+}\phi_2\phi_1=0\\&\mathrm{i}\,\phi_{2t}+\phi_{2xx}-2\kappa(\phi_1^{+}\phi_1+\phi_2^{+}\phi_2)\phi_2=0\end{aligned}\tag{3}$$

となる．

このモデルの線型補助問題（A．L．P．）は，

$$\begin{aligned}&v_{1x}-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda v_1=\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\ v_3\phi_1\\&v_{2x}-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda v_2=\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\ v_3\phi_2\\&v_{3x}+\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda v_3=-\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\ \phi_1^{+}v_1-\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\ \phi_2^{+}v_2\end{aligned}\tag{4}$$

となり，$x\to-\infty$ での境界条件（B．C．）が次のようなJost演算子を考える．

$$\psi_{j1}\sim\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x},\quad\psi_{j2}\sim\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x},\quad\psi_{j3}\sim\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\tag{5}$$

(4)とあわせて，ψ_{ij} の積分方程式が求まる．たとえば，

$$\begin{aligned}&\psi_{13}e^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}x}=\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\int dy\,\theta(x-y)\psi_{33}e^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}y}\phi_1e^{-\mathrm{i}\lambda y}\\&\psi_{23}e^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}x}=\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\int dy\,\theta(x-y)\psi_{33}e^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}y}\phi_2e^{-\mathrm{i}\lambda y}\\&\psi_{33}e^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}x}=1-\mathrm{i}\sqrt{\kappa}\int dy\,\theta(x-y)\{\phi_1^{+}e^{\mathrm{i}\lambda y}\psi_{13}e^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}y}+\phi_2^{+}e^{\mathrm{i}\lambda y}\psi_{23}e^{-\mathrm{i}\frac{\lambda}{2}y}\}\end{aligned}\tag{6}$$

この方程式は逐次代入法で解くことができる．Jost演算子の $x\to+\infty$ で係数

$$\psi_{j1}\sim\begin{pmatrix}a_{11}(\lambda)e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\\a_{21}(\lambda)e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\\a_{31}(\lambda)e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\end{pmatrix}\quad\psi_{j2}\sim\begin{pmatrix}a_{12}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\\a_{22}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\\a_{32}e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\end{pmatrix}\quad\psi_{j3}\sim\begin{pmatrix}a_{13}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\\a_{23}e^{\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\\a_{33}e^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\lambda x}\end{pmatrix}\tag{7}$$

$a_{ij}(\lambda)$ を散乱データ演算子という．a_{ij}は，κ についてべき展開される．たとえば

$$
\begin{aligned}
a_{31}(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\theta(x_1 > y_1 > \cdots > x_n > y_n)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1+\cdots+x_n)-\mathrm{i}k(y_1+\cdots+y_n)} \\
\times \sum_{\{i\}} \phi_{i_1}^{+}(x_1) \cdots \phi_{i_n}^{+}(x_n)\, \phi_{i_n}(y_n) \cdots \phi_{i_1}(y_1)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここで θ は階段関数の積である．

こうして得られた散乱データ演算子とハミルトニアンとの交換関係を調べると，

$$
\begin{aligned}
&[H,\ a_{33}(k)] = 0 \\
&[H,\ a_{31}(k)] = k^2 a_{31}(k) \qquad [H,\ a_{32}(k)] = k^2 a_{32}(k)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となっていることがわかる．

また，この散乱データ演算子からなる行列 $T(\lambda) \equiv (a_{ij}(\lambda))$ は，

$$
R_\infty [T(k_1) \tilde{\otimes} T(k_2)] = [T(k_2) \tilde{\otimes} T(k_1)] R_\infty \tag{10}
$$

ただし

$$
R_\infty = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \alpha & & \beta & & & & & \\
 & & 0 & & & & \gamma & & \\
\hline
 & \beta & & \alpha & & & & & \\
 & & & & \alpha-\beta & & & & \\
 & & & & & 0 & & -\gamma & \\
\hline
 & & \beta & & & & 0 & & \\
 & & & & & -\beta & & 0 & \\
 & & & & & & & & \alpha-\beta
\end{array}\right)
\qquad
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\mathrm{i}\kappa}{k_1 - k_2 + \mathrm{i}\kappa} \\
\beta &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 + \mathrm{i}\kappa} \\
\gamma &= \frac{k_1 - k_2 - \mathrm{i}\kappa}{k_1 - k_2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

という Yang-Baxter 関係を満たす．

ここで，演算子 $R_j^{+}(k)$ を

$$
R_j^{+}(k) \equiv -\mathrm{i} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} a_{3j}(k)\, a_{33}^{-1}(k) \tag{12}
$$

と定義すれば，散乱データの代数(10)を用いて

$$
\begin{aligned}
&R_1(k_1) R_1(k_2) = -R_1(k_2) R_1(k_1) \\
&R_2(k_1) R_2(k_2) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 + \mathrm{i}\kappa} R_2(k_2) R_1(k_1)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$R_1(k_1)R_2(k_2)=\frac{k_1-k_2}{k_1-k_2+i\kappa}R_2(k_2)R_1(k_1)-\frac{i\kappa}{k_1-k_2+i\kappa}R_1(k_2)R_2(k_1)$$

$$R_2(k_1)R_1(k_2)=\frac{k_1-k_2}{k_1-k_2+i\kappa}R_1(k_2)R_2(k_1)-\frac{i\kappa}{k_1-k_2+i\kappa}R_2(k_2)R_1(k_2)$$

を得る．

また，(9)の性質より，$R_j^+(k)$は，ハミルトニアンの固有状態を生成する演算子であることがわかる．真空$|0>$を$\phi(x)|0>$によって導入すれば，状態

$$|\Phi_{i_1\cdots i_n}(k_1\cdots k_n)>=R_{i_1}^+(k_1)\cdots R_{i_n}^+(k_n)|0> \tag{14}$$

はHの固有状態になる．実際，(9)をつかえば

$$H|\Phi_{i_1\cdots i_n}(k_1\cdots k_n)>=(\sum_{j=1}^{n}k_j^2)|\Phi_{i_1\cdots i_n}(k_1\cdots k_n)> \tag{15}$$

となる．

こうして，Q．I．S．M．によって，ハミルトニアンを対角化することができた．将来の発展としては，

1. Quantum Gel'fand Levitan 方程式を求め，有限温度の性質を議論すること．
2. N成分に拡張すること．
3. $\kappa<0$にして，Bound States について研究すること．

などがあげられる．

（註１）　(10)式で$\tilde{\otimes}$は graded space における直積を意味し，次のように定義される．

$$(A\tilde{\otimes}B)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}=(-1)^{P(\alpha)[P(\beta)+P(\delta)]}A_{\alpha\gamma}B_{\beta\delta}$$

ただし，$P(1)=0$，$P(2)=P(3)=1$

（註２）　ここではFermion-Bosonの系をあげたが，２種のFermion（Spin 1/2のモデルに対応する）の場合も，同様に形式化できる．ただし，$\tilde{\otimes}$の定義で$P(1)=P(2)=0$, $P(3)=1$とする必要がある。